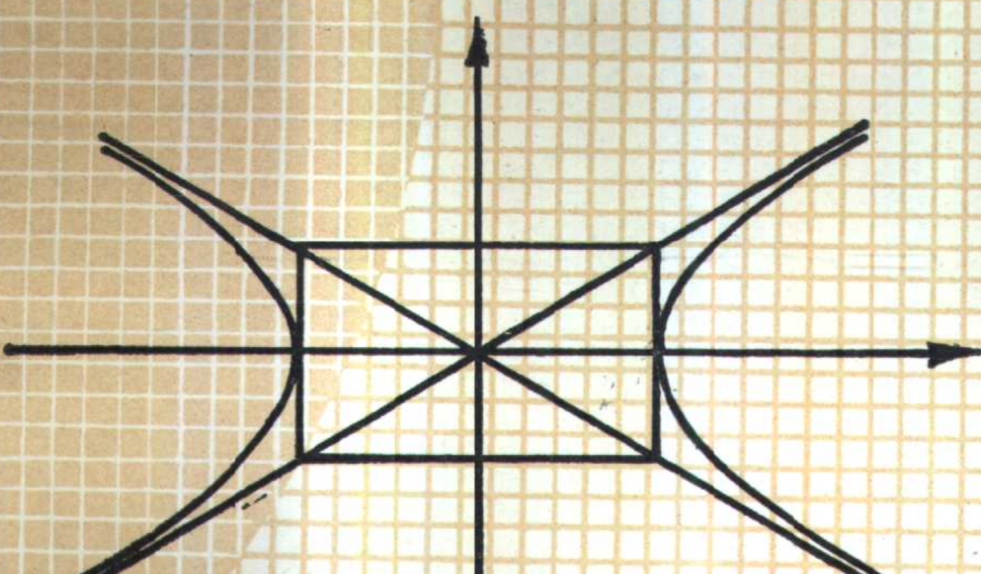
中等师范学校数学课本

几何

第二册



人民教育出版社

封面设计：胡茂林

中等师范学校数学课本

（试 用 本）

几　　何

第 二 册

曹幼文 方 铨 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32　印张4.5　字数92,000

1983年1月第1版　1984年8月第4次印刷

印数　472,001—513,000

书号　K7012·0395　　定价 0.35元

本书是由教育部委托湖南省教育厅组织编写的。初稿完成后，教育部委托湖南省教育厅和人民教育出版社召集有北京、上海、河北、辽宁、吉林、江苏、浙江、福建、湖北、四川等省市代表参加的审稿会议，对初稿进行了审查。会后，由编者根据审查意见进行了修改。

引　言

我们在平面几何和立体几何里，所用的研究方法是以公理为基础，直接地依据几何图形的点、线、面的关系来研究它们的性质．在将要学习的平面解析几何里，所用的研究方法则不同，它是在坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲线(包括直线)，通过研究方程的特征间接地来研究曲线的性质．因此可以说，解析几何是在坐标系的基础上，通过代数方法来研究几何图形的一门数学学科．

平面解析几何研究的主要问题是：

(1) 根据已知条件，求出表示平面曲线的方程；

(2) 通过方程，研究平面曲线的性质．

解析几何是进一步学习数学、物理和其他一些科学技术的基础．

1637 年，法国数学家笛卡儿在他所著《几何学》一书中，首先提出了解析几何的基本思想，论述了解析几何的方法．解析几何的产生，有力地促进了数学的发展，特别是微积分的出现．

目　　录

引言

第五章　曲线和方程……1

第六章　直线……18

　一　直线的方程……18

　二　两条直线的位置关系……34

第七章　二次曲线……49

　一　圆……49

　二　椭圆……56

　三　双曲线……66

　四　抛物线……76

*第八章　坐标变换……93

　一　坐标轴的平移……93

　二　坐标轴的旋转……99

*第九章　极坐标和参数方程……113

　一　极坐标……113

　二　参数方程……126

第五章　曲线和方程

5.1　有向线段

在初中，我们学过数轴，它是规定了原点、正方向和长度单位的直线。任意一条直线，都可以规定两个相反的方向，如果把其中一个作为正方向，那么相反的方向就是负方向．规定了正方向的直线叫做**有向直线**（正方向一般用箭头表示），如图 5-1.



图　5-1



图　5-2

一条线段也可以规定两个相反的方向．如图 5-2 中的线段 AB，如果以 A 为起点、B 为终点，那么它的方向是从 A 到 B；相反，如果以 B 为起点，A 为终点，它的方向就是从 B 到 A．规定了方向(即规定了起点和终点)的线段叫做**有向线段**．表示有向线段时，要将表示起点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面．如以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作 $\overline{AB}$．图 5-2 中 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 是方向相反的有向线段，$\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 是方向相同的有向线段.

选定一条线段作为长度单位，我们可以量得一条有向线段的长度，有向线段 $\overline{AB}$ 的长度记作 $|AB|$．如图 5-3，设线段 l 是长度单位，那么，$|AB|=3$．因为有向线段的长度与方向

选择无关，所以 $|AB|=|BA|$.



图 5-3

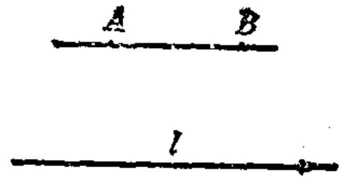


图 5-4

如果有向线段 $\overline{AB}$ 在有向直线 l 上或与 l 平行，那么，它的方向与 l 的正方向相同或相反. 例如图 5-4 中的 $\overline{AB}$ 与 l 的正方向相同，而 $\overline{BA}$ 与 l 的方向相反.

根据有向线段 $\overline{AB}$ 与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数，叫做**有向线段的数量或数值**. 有向线段的数量用 AB 表示. 显然 $AB=-BA$.

数轴 Ox 是有向直线，数轴上点 P 的坐标 x_0，实际上是以有向线段的数量来定义的. 点 P 的坐标 x_0 是以原点 O 为起点、P 为终点的有向线段 $\overline{OP}$ 的数量，$OP=x_0$（图 5-5）. 例如 $OA=3$, $OB=-2$.

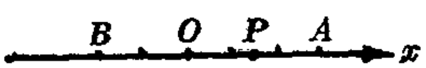


图 5-5

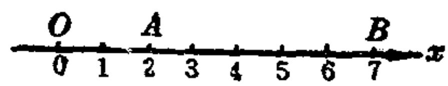


图 5-6

现在我们来研究怎样用起点坐标和终点坐标来表示数轴上任意一条有向线段的数量. 如图 5-6. $AB=+5$，它的起点 A 的坐标 $x_A=+2$，终点 B 的坐标 $x_B=+7$，而 $x_B-x_A=(+7)-(+2)=+5$，两相比较有，

$$AB=x_B-x_A.$$

一般地，当 A、B 两点均在数轴上时，有向线段 $\overline{AB}$ 的数量 AB 也可以用上式表示. 如图 5-6,

$$\because \quad OA+AB=OB.$$

$$\therefore \quad AB=OB-OA.$$

但 $$OB=x_B, \quad OA=x_A.$$

$$\therefore \quad AB=x_B-x_A.$$

同学们可以通过作本节练习的第 1 题，证明 A、B 两点在数轴的其他五种位置时，上面的等式恒成立．就是说，

数轴上任意一条有向线段的数量等于终点的坐标减去起点的坐标．

例 已知数轴上点 A、B、C 的坐标分别是 4、-2、-6．求 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的数量和长度(图 5-7)．

解： $AB=(-2)-4=-6, \qquad |AB|=|-6|=6;$

$BC=-6-(-2)=-4, \quad |BC|=|-4|=4;$

$CA=4-(-6)=10,$

$|CA|=|10|=10.$

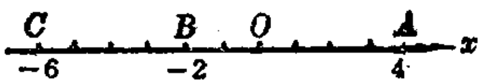
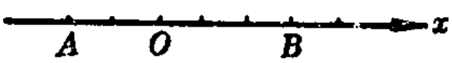


图 5-7

练 习

1. 就(1)到(5)各图中 O、A、B 的五种位置关系，验证公式

$$\overline{AB}=x_B-x_A.$$



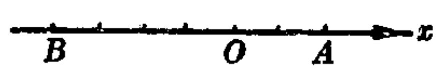
(1)



(2)



(3)



(4)



(5)

(第 1 题)

2. 已知数轴上点 A、B、C、D 的坐标依次为 5、-1、-8、2. 求 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 和 $\overline{DB}$ 的数量和长度.

5.2 两点间的距离

容易知道,我们要计算数轴上 A、B 两点间的距离,只要求出 $\overline{AB}$ 或 $\overline{BA}$ 的数量后,再取绝对值就可以了. 因此 A、B 两点间的距离(线段 $\overline{AB}$ 的长度 $|AB|$ 就是 A、B 两点间的距离)是

$$|AB|=|x_B-x_A|.$$

现在来讨论平面上任意两点间的距离.

设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是坐标平面内的任意两点(图 5-8),求 P_1、P_2 两点间的距离.

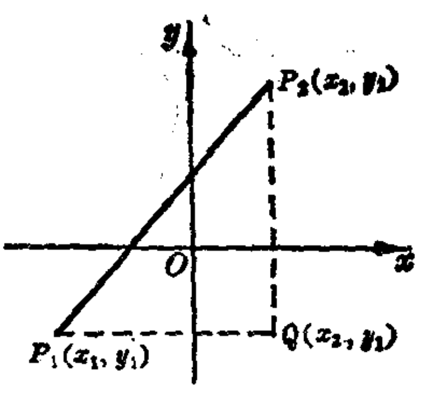


图 5-8

如图,过 P_1、P_2 分别作 x 轴、y 轴的平行线,相交于 Q. 那么 Q 点的坐标是 (x_2, y_1). $\triangle P_1QP_2$ 是直角三角形. 根据勾股定理,有

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2$$

$$\because \quad |P_1Q|^2=|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2,$$

$$|QP_2|^2=|y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)^2,$$

$$\therefore \quad |P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

于是得到 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点间距离公式:

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

例 1 求两点 $P_1(-3, 5)$和 $P_2(1, 2)$间的距离.

解: 因为 $x_1=-3$, $y_1=5$; $x_2=1$, $y_2=2$. 代入两点间的距离公式, 得

$$|P_1P_2|=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}=\sqrt{25}=5.$$

例 2 已知点P在x轴上, 它与点$A(1, -3)$的距离等于5. 求点P的坐标.

解: 因为x轴上的点的纵坐标都等于 0, 所以可设点P的坐标为$(x, 0)$. 根据题意,

$$|AP|=5.$$

由两点间距离公式, 得

$$\sqrt{(x-1)^2+[0-(-3)]^2}=5.$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2+9}=5.$$

把方程两边平方, 得

$$(x-1)^2+9=25.$$

因此, $x-1=\pm 4$.

$\therefore$ $x_1=5, x_2=-3$.

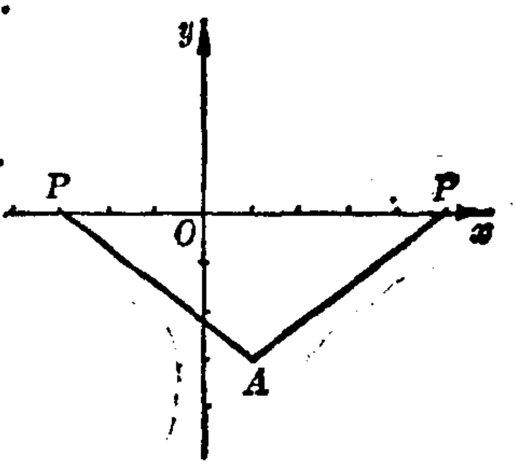


图 5-9

经检验, 这两个值都是原方程的根. 因此, 所求的点P的坐标是$(5, 0)$或$(-3, 0)$, 如图 5-9 所示.

练 习

1. 求下列两点间的距离:

(1) $P_1(-1, 0)$和 $P_2(2, 0)$;

(2) $P_1(0, 6)$和 $P_2(0, -2)$;

(3) $A(-2, 0)$和 $B(-4, 3)$;

(4) $A(2, -5)$和 $C(2, 3)$;

(5) $O(0, 0)$ 和 $P(2, -3)$;

(6) $P_1(a+b, c+a)$ 和 $P_2(c+a, b+c)$.

2. 在 y 轴上有一点 P, 它与点 $A(4, -6)$ 的距离是 5, 求点 P 的坐标.

3. 如果点 $P_1(8, 4)$ 与 $P_2(5, k)$ 间的距离是 5, 求 k 的值.

5.3 线段的定比分点

已知两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 点 $P(x, y)$ 把有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$, $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的数量比 (即 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$) 叫做点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比. 点 P 叫做**分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 为定比 λ 的定比分点**.

现在我们根据 P_1 和 P_2 两点的坐标和定比 λ, 求分点 P 的坐标.

如图 5-10, 过 P_1、P、P_2 分别作 y 轴的平行线, 交 x 轴于 M_1、M、M_2. 根据平行线分线段成比例定理, 得

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

$$\because \quad M_1M=x-x_1,$$

$$MM_2=x_2-x,$$

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

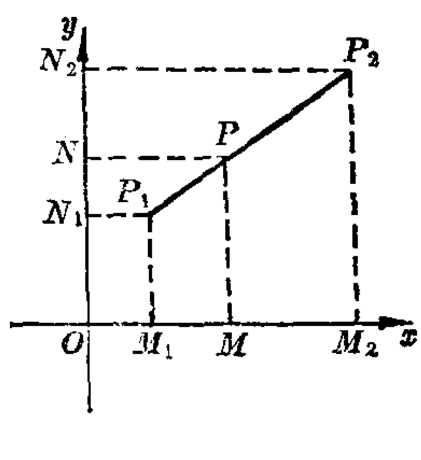


图 5-10

解这个关于 x 的方程, 得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

类似地, 过 P_1、P、P_2 分别作 x 轴的平行线交 y 轴于 N_1、

N、N_2，可以得到

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，把连结 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成定比 λ 的点 P 的坐标是：

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\lambda x}_2}{\mathbf{1}+\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{\lambda y}_2}{\mathbf{1}+\boldsymbol{\lambda}}.$$

应用上面公式时，必须注意 (x_1, y_1) 是起点的坐标，(x_2, y_2) 是终点的坐标.

特别，当 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=1$，所以，$\overline{P_1P_2}$ 的中点坐标是：

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2}{\mathbf{2}}, \quad \boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2}{\mathbf{2}}.$$

例 1 点 P_1 和 P_2 的坐标分别是 $(-1, -6)$ 和 $(3, 0)$，分点 P 的横坐标为 $\frac{7}{3}$（图 5-11）. 求点 P 的纵坐标.

解： $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{\frac{7}{3}-(-1)}{3-\frac{7}{3}}=5$，

$$\therefore \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

$$=\frac{-6+5\times 0}{1+5}=-1.$$

所以点 P 的纵坐标是 -1.

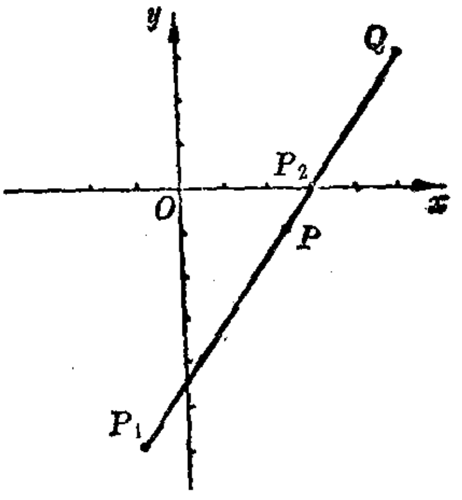


图 5-11

分点P在有向线段$\overline{P_1P_2}$之间，通常称P为内分点，这时因为 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{M_1M}{MM_2}$，$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$同向，同时$\overline{M_1M}$与$\overline{MM_2}$同向，所以有 $\lambda>0$.

还有外分点，即P在$\overline{P_1P_2}$的延长线上，这时因为$\overline{P_1P}$、$\overline{PP_2}$异向，同时$\overline{M_1M}$、$\overline{MM_2}$异向，所以有 $\lambda<0$，但 $\lambda\neq-1$.

例2 在上例$\overline{P_1P_2}$的延长线上求一点Q，使$|P_2Q|$为$|P_1P_2|$的一半.

解： 根据所给条件 $|P_2Q|=\dfrac{1}{2}|P_1P_2|$. 即

$$2|P_2Q|=|P_1P_2|.$$

$$\because\quad |P_1Q|=|P_1P_2|+|P_2Q|$$

$$=|P_1P_2|+\frac{1}{2}|P_1P_2|=\frac{3}{2}|P_1P_2|.$$

$$\therefore\quad \frac{|P_1Q|}{|QP_2|}=\frac{\frac{3}{2}|P_1P_2|}{\frac{1}{2}|P_1P_2|}=3.$$

$\because$ Q 为外分点，$\lambda<0$，

$\therefore$ $\lambda=-3$. 代入分点坐标公式，得

$$x=\frac{-1+(-3)\times3}{1-3}=5,\ y=\frac{-6+0}{1-3}=3.$$

所以点Q的坐标是(5, 3).

练　习

1. 已知P_1、P_2两点的坐标，求分有向线段$\overline{P_1P_2}$所成的比是λ的分点坐标：

(1) $P_1(4,-3), P_2(-2,6), \lambda=2$;

(2) $P_1(-4,1), P_2(5,4), \lambda=-\frac{1}{2}$;

(3) $P_1(2,6), P_2(-4,8), \lambda=-2$.

2. 连结两点 $P_1(2,y)$ 和 $P_2(x,6)$ 的线段 P_1P_2 的中点是 $P(3,2)$，求 x 和 y.

3. 作线段连结 $P_1(1,1)$ 和 $P_2(3,7)$，并延长到 P，使 $|P_1P|=3|P_1P_2|$，求 P 点的坐标.

4. 已知 $P(-2,3)$ 是在 $P_1(-3,5)$ 和 $P_2(4,-9)$ 连结线段上的一个分点，求点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ 的值.

例 3 证明三角形两边中点连线等于第三边的一半.

证明: 已知$\triangle ABC$, M、N 分别是 AC、BC 的中点，以 AB 所在的直线作 x 轴，点 A 作原点，建立直角坐标系，如图5-12. 设 B 和 C 的坐标分别是 $(a,0)$ 和 (c,d)，由中点坐标公式可知，M 点的坐标是 $\left(\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right)$，$N$ 点的坐标是$\left(\frac{a+c}{2},\frac{d}{2}\right)$. 所以，

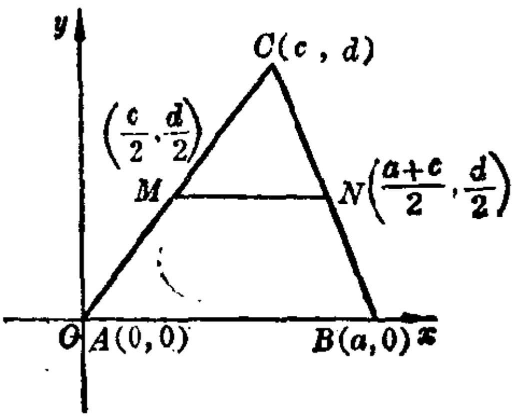


图 5-12

$$|MN|=\sqrt{\left(\frac{c}{2}-\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}|AB|.$$

例 4 $\triangle ABC$ 中，AO 是 BC 边上的中线，求证:

$$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$$

证明: 取线段 BC 所在的直线作 x 轴，BC 的中点 O 作原

点，建立直角坐标系，如图 5-13．设 C 点的坐标为 $(a, 0)$，那么 B 点的坐标就是 $(-a, 0)$．再设 A 点的坐标为 (b, c)．

于是 $|AB|^2=(-a-b)^2+(0-c)^2$,

$|AC|^2=(a-b)^2+(0-c)^2$,

$|AB|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2+c^2)$.

又 $|AO|^2=b^2+c^2, |OC|^2=a^2$.

$2(|AO|^2+|OC|^2)=2(a^2+b^2+c^2)$.

$\therefore$ $|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$.

从上面的例子可以看到：通过建立坐标系，一部分几何题可以用代数的方法来解，这种方法称为解析法．应用这种方法时，首先要建立坐标系．坐标系选择得适当，不仅可使图形的性质容易表达，同时也可使运算简化．

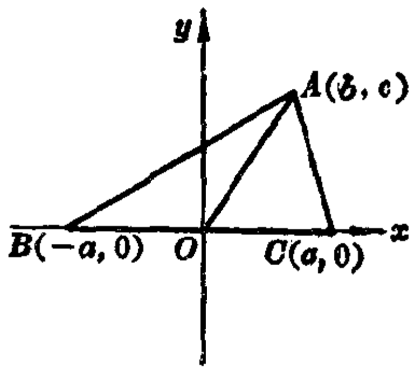


图 5-13

练 习

1．求证：矩形的两条对角线互相平分且相等．

2．求证：梯形两腰中点的连线等于两底和的一半．

3．求证：以 $A(0, 0)$、$B(3, 1)$、$C(1, 7)$ 为顶点的三角形是直角三角形．

5.4 曲线方程的概念

在平面解析几何里，我们把曲线看作是由点按某种规律运动所形成的轨迹（或点的集合）．例如炮弹射出后，因受地

心引力及空气阻力的影响，所经过的轨道就是一条弹道曲线，如果空气阻力可以忽略不计，那就得到一条抛物线．因为点的变动规律不同（也就是说它所受的限制条件不同），则它所形成的曲线也就不同．另一方面，由于点可以用坐标完全确定地表示出来，点的变动也必引起坐标的变动，因此，点变动时所受的限制条件（运动的规律）也就可以用点的坐标所受的限制条件表示出来．

一个运动着的点的位置可以用坐标(x, y)来表示，其中x和y可以取任意实数．如果这点是在曲线上，那么根据上面所说，它的坐标也必须受一个或几个条件限制．这种条件通常就是用坐标所满足的方程来表示．因此也可以说方程是说明点的运动规律的代数表达式．

这样，曲线作为点的轨迹，在代数上就可用它的坐标所满足的方程来表示．由此可见，曲线与方程可以建立对应关系．

例如，求平分坐标系xOy中第Ⅰ和第Ⅲ象限角的直线AB的方程．

如图 5-14，从平面几何得知角平分线是到角的两边距离相等的点的轨迹，因此对于AB上的任意一点$M(x, y)$，等式$|x|=|y|$成立，且横坐标和纵坐标的符号相同．把这些性质用方程的形式表示为$x=y$（或$x-y=0$），这就是所求的直线AB的方程．这就是说，直线AB上的任何点的坐标都满足方程$x-y=0$，反过来满足方程$x-y=0$的

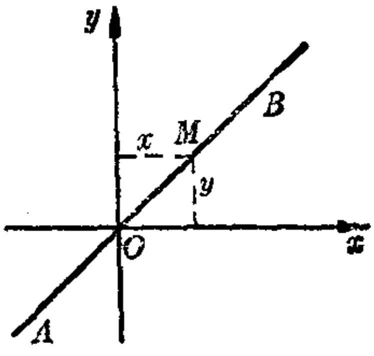


图 5-14

x 和 y 所表示的点都在直线 AB 上.

如果曲线上所有点的坐标 (x, y) 都满足一个含有 x 和 y 的方程，而满足这个方程的 x 和 y 所表示的点都在这条曲线上，那么这个方程就叫做这**条曲线的方程**，这条曲线也就叫做这**个方程的曲线**.

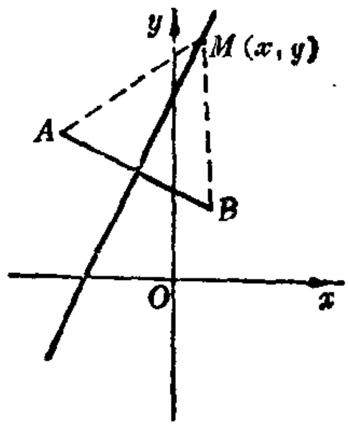


图 5-15

例1 已知线段 AB 的端点 $A(-3,4)$ 和 $B(1,2)$. 求 AB 的中垂线的方程.

解：设 $M(x,y)$ 是线段 AB 的垂直平分线上任意一点 (图 5-15)，也就是点 M 属于集合

$$P=\{M:|MA|=|MB|\}.$$

由两点间距离公式，点 M 所适合的条件可表示为

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}. \quad (1)$$

两边平方后，得

$$(x+3)^2+(y-4)^2=(x-1)^2+(y-2)^2. \quad (2)$$

化简后，得

$$2x-y+5=0. \quad (3)$$

下面，我们证明方程 (3) 是线段 AB 的垂直平分线的方程.

(1) 设 $M_1(x_1, y_1)$ 是垂直平分线上任意一点，因为它与 A、B 两点的距离相等，所以 (x_1, y_1) 必定满足方程 (1)，也就是适合方程(3).

(2) 设点 M_2 的坐标 (x_2, y_2) 是方程(3)的解，那么

$$2x_2-y_2+5=0,$$

即 $$y_2=2x_2+5.$$

点 M_2 到 A、B 的距离分别是:

$$|M_2A|=\sqrt{(x_2+3)^2+(y_2-4)^2}$$
$$=\sqrt{(x_2+3)^2+(2x_2+1)^2}=\sqrt{5x_2^2+10x_2+10},$$
$$|M_2B|=\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-2)^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-1)^2+(2x_2+3)^2}=\sqrt{5x_2^2+10x_2+10}.$$

$\therefore \quad |M_2A|=|M_2B|.$

所以点 M_2在线段 AB 的垂直平分线上.

由(1)、(2)可知, 方程 (3) 是线段 AB 的垂直平分线的方程.

例 2 求圆心在原点、半径等于 5 的圆的方程.

解: 以 O 为坐标原点, 建立坐标系如图 5-16. 在圆上任取一点 $M(x, y)$, 则点 M 属于集合

$$P=\{M: |OM|=5\}.$$

$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2}=5, \qquad (1)$

即 $\quad x^2+y^2=25. \qquad (2)$

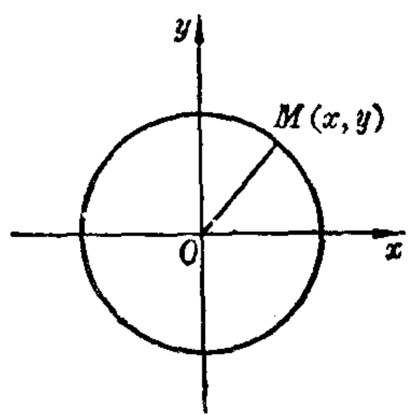


图 5-16

下面我们证明方程(2) 是所求曲线的方程.

(1) 设 $M_1(x_1, y_1)$ 是圆上任意一点, 因为点 M 到坐标原点的距离等于 5, 所以 (x_1, y_1) 必定满足方程(1), 也就是适合方程(2).

(2) 设 $M_2(x_2, y_2)$ 是方程(2)的解，那么

$$x_2^2+y_2^2=25.$$

两边开方取算术根，得

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2}=5.$$

即点 $M_2(x_2, y_2)$ 到坐标原点的距离等于5，点 M_2 在这个圆上.

由(1)、(2) 可知 $x^2+y^2=25$ 是以坐标原点为圆心、半径等于5的圆的方程.

从上面的例子看出，求曲线的方程步骤如下：

(1) 建立适当的直角坐标系，用 (x, y) 表示曲线上动点 M 的坐标；

(2) 写出适合条件 p 的点 M 的集合 $P=\{M \mid p(M)\}$；

(3) 用坐标表示条件 $p(M)$，列出方程 $f(x, y)=0$；

(4) 把方程 $f(x, y)=0$ 化为最简形式；

(5) 说明化简后的方程就是所求曲线的方程.

本书对步骤(5)不作要求，可以省略不写，并且根据问题的情况，也可以省略步骤(2)。

练 习

1. 判定下列各曲线是否经过原点：

   (1) $y=x+5$;

   (2) $y=x^2-3x$;

   (3) $x^2+y^2-10x+9=0$.

2. 已知点 $A(x, -4)$ 在曲线 $x^2-4x-2y-5=0$ 上，试求点 A 的横坐标.

3. 求适合下列条件的点的轨迹方程：

(1) 与 Oy 轴的距离等于 2；

(2) 与原点的距离等于 10.

习 题 一

1. 一菱形边长等于 5，一条对角线的长是 6，取两条对角线所在的直线作坐标轴，求四个顶点的坐标.（提示：有两种情况.）

2. 已知数轴上两点 A、B 的坐标分别是 x_A 和 x_B，求 AB 和 BA：

(1) $x_A=8$，$x_B=6$；　(2) $x_A=2$，$x_B=-1$；

(3) $x_A=-3$，$x_B=0$；(4) $x_A=0$，$x_B=-8$.

3. 求 x 轴上和点 $A(6,4)$、$B(5,-3)$ 等距离的点的坐标.

4. 求与点 $(1,3)$、$(0,6)$、$(-4,1)$ 等距离的点的坐标.

5. 求三角形的顶点，已知它三边的中点分别为：$P(3,-2)$，$Q(1,6)$ 和 $R(-4,2)$.

6. 把连结点 $A(3,2)$ 和 $B(15,6)$ 的线段分成三等分，求分点的坐标.

7. P_1 和 P_2 两点的坐标分别是 $P_1(4,-3)$ 和 $P_2(-2,6)$，点 P 在直线 P_1P_2 上，并且适合下列条件，求 P 点的坐标：

(1) $P_1P:PP_2=2$；　(2) $P_1P:PP_2=\frac{4}{5}$.

(3) $P_1P:PP_2=-3$.

8. 求证：直角三角形斜边的中线，等于斜边的一半.

9. 求证：平行四边形的对角线互相平分.

10. 动点到 $A(4,5)$ 的距离的二倍，等于到点 $B(-2,3)$ 的距

离，求动点的轨迹方程.

11. 等腰三角形一腰的两端是 $A(4,2)$ 和 $B(3,5)$，求三角形第三个顶点的轨迹方程.（提示：有两解.）

小　结

本章内容介绍了有向线段的数量、两点间距离公式与定比分点的坐标公式. 在此基础上讨论曲线与方程之间的联系，提出了由曲线的条件列出方程的步骤.

1. 在数轴上，如果点 A 的坐标是 x_A，点 B 的坐标是 x_B，那么，有向线段 $\overline{AB}$ 的数量，就等于它的终点的坐标减去起点的坐标，即

$$AB=x_B-x_A.$$

2. 已知两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，利用公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

可以求得这两点间的距离.

3. 已知有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的两个端点是 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，点 P 把 $\overline{P_1P_2}$ 分成 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$，且它们的数量的比为 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，那么，由定比分点公式 $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ 可以求得分点 $P(x,y)$ 的坐标.

特别地，$\overline{P_1P_2}$ 的中点 $Q(x,y)$ 的坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

4. 由于平面上建立了直角坐标系，使得平面内的点和一

对有序实数(x, y)之间建立了一一对应的关系．于是，曲线作为点的轨迹，在代数上就可以用它的坐标所满足的方程来表示，这样就将曲线与方程对应起来了，我们就有可能用代数的方法研究和解决几何问题．

复习题五

1. 已知一正六边形的边长等于 a．如果原点在它的中心而横轴经过它的两个相对的顶点，试求这个正六边形的顶点的坐标．
2. 动点从点 $A(3, 2)$ 开始作直线运动，其运动方向与 Ox 轴成 $60°$ 角，移动 12 单位至 B 点．求 B 点的坐标．
3. 在 Oy 轴上求与点 $(0, 5)$ 和 $(4, 2)$ 等距离的点。
4. 点 $C(0, 2)$ 分 $A(-2, 1)$ 和 B 两点间的线段所成的定比为 $\frac{1}{5}$，求 B 点的坐标．
5. 已知三角形的顶点是$A(5, -1)$、$B(-1, 7)$、$C(1,2)$，试求顶角 A 的角平分线的长．
6. 证明：如果点 $P(x, y)$ 到 $M(2, 3)$ 和 $N(4, 5)$ 两点的距离相等，则 $x+y=7$．
7. 曲线的方程是什么意思？是否每一条曲线都可以求出它的方程？
8. 动点到 $(-4, 0)$ 和 $(4, 0)$ 两点的距离平方和是 50，求动点的轨迹．
9. 已知点 P 在曲线上，求 k 的值：

   (1) $2x-3y+k=0$, $P(-2, -3)$;

   (2) $x^2+k^2y^2-3x-ky-4=0$, $P(2, 1)$.

第六章 直 线

在本章中，我们将确定一次方程和直线间的关系，并研究各种不同形式的直线方程及直线与直线位置关系等问题.

一 直线的方程

6.1 直线的倾斜角和斜率

在建立直线方程之前，我们先来说明直线的倾斜角和斜率的意义。

一条直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角叫做这条直线的**倾斜角**，如图 6-1 的 α. 特别地，当直线 l 和 x 轴平行时，我们规定它的倾斜角为 $0°$. 因此，倾斜角的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$.

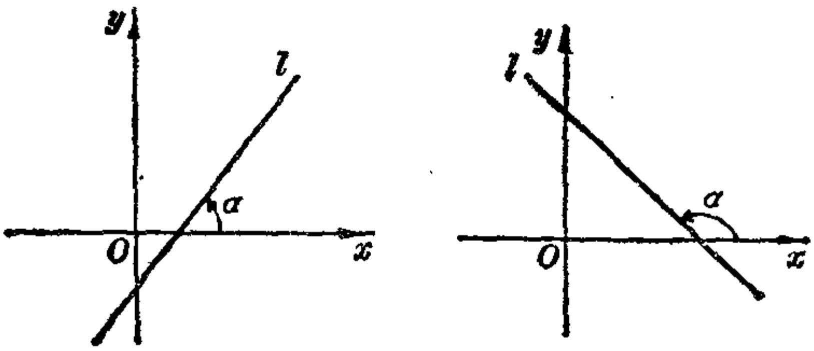


图 6-1

一条直线的倾斜角 α 的正切叫做这条直线的**斜率**. 斜率常用 k 来表示，即

$$\boxed{k=\operatorname{tg}\alpha.}$$

当 α 为锐角时，$k>0$；当 α 为钝角时，$k<0$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，k 不存在。

现在设直线上两点 P_1、P_2 的坐标是(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，直线 P_1P_2 的倾斜角 α 不等于$\frac{\pi}{2}$，我们来求直线 P_1P_2 的斜率 k。

过 P_1、P_2 分别向 x 轴作垂线 P_1M_1、P_2M_2，再过 P_1 作 $P_1Q\perp P_2M_2$，垂足分别是 M_1、M_2、Q，那么

$\alpha=\angle QP_1P_2$（图 6-2 甲），

或 $\alpha=\angle PP_1P_2$（图 6-2 乙）。

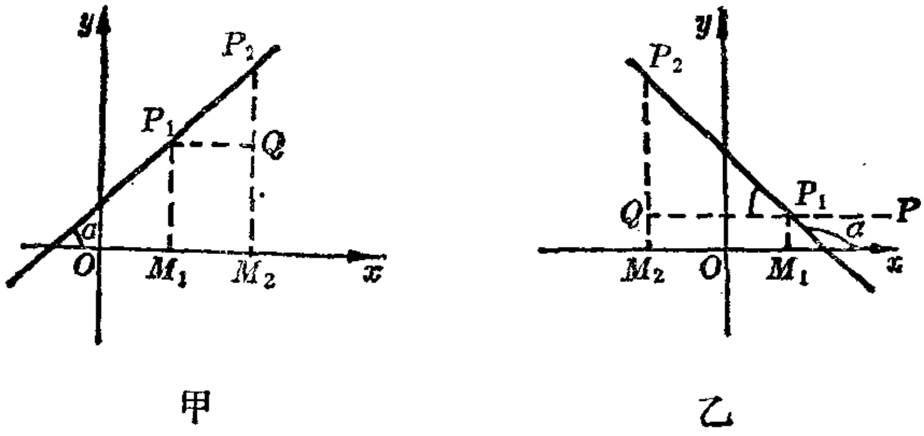


图 6-2

在图 6-2 甲里，

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg} QP_1P_2=\frac{QP_2}{P_1Q}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

在图 6-2 乙里，

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg} PP_1P_2=\frac{QP_2}{P_1Q}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

所以我们得到经过 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$两点的直线的

斜率公式:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

如果已经知道直线的斜率 $k=\mathrm{tg}\alpha$, 由于规定了 $0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ$, 所以利用三角函数表就可以求出这条直线的倾斜角.

例 1 如图 6-3, 直线 l_1 的倾斜角 $\alpha_1=30^\circ$, 直线 $l_2\perp l_1$, 求 l_1、l_2 的斜率.

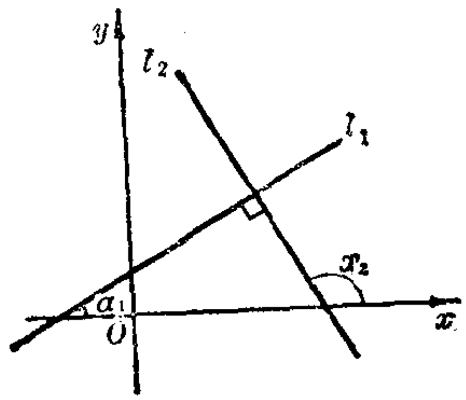


图 6-3

解: 因为 l_1 的斜率 $k_1=\mathrm{tg}\,30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, l_2 的倾斜角 $\alpha_2=90^\circ+30^\circ=120^\circ$, 所以 l_2 的斜率

$$k_2=\mathrm{tg}\,120^\circ=-\mathrm{tg}\,60^\circ=-\sqrt{3}.$$

例 2 求经过 $A(-2,0)$、$B(-5,3)$ 两点的直线的斜率和倾斜角.

解: $k=\frac{3-0}{-5-(-2)}=-1$,

就是 $\mathrm{tg}\alpha=-1$.

$\therefore\quad \alpha=135^\circ$.

因此, 这条直线的斜率是 -1. 倾斜角是 135°.

练 习

1. 求经过下列两点的直线的斜率和倾斜角, 画出过这两点的直线.

(1) $A(3,5)$, $B(-4,12)$; (2) $C(10,8)$, $D(4,-4)$;

(3) $P(0,0)$, $Q(-1,3)$; (4) $M(3,-2)$, $N(4,5)$.

2. 已知 a、b、c 是两两不等的实数，求经过下列每两个点的直线的倾斜角：

(1) $A(a,c)$, $B(b,c)$; (2) $C(a,b)$, $D(a,c)$;

(3) $P(b,b+c)$, $Q(a,c+a)$;

(4) $M(a,b+c)$, $N(b,c+a)$.

3. 已知一条直线的斜率 $k=2$, $P_1(3,5)$、$P_2(x_2,7)$、$P_3(-1,y_3)$是这条直线上的三个点，求 x_2 和 y_3.

6.2 直线方程的几种形式

前面我们学过曲线和方程的一般关系，现在我们来研究由不同的条件所表示的直线方程.

1. 点斜式 已知直线 l 经过点 $P_1(x_1,y_1)$，并且它的斜率是 k，求直线 l 的方程.

设 $P(x,y)$是直线 l 上的任意一点(图 6-4)，那么

P_1P 的斜率 = 直线 l 的斜率，

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1}=k.$$

就是

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1).} \tag{1}$$

我们看到：直线 l 上任意一点的坐标都是方程(1)的解，反过来，以方程(1)的解为坐标的点都在直线 l 上. 因此，方程(1)就是所求的直线方程.

这个方程是由直线上的一点和直线的斜率确定的，所以

叫做直线方程的点斜式.

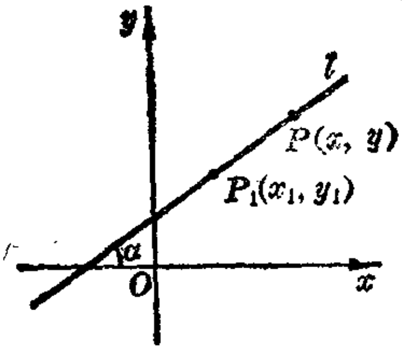


图 6-4

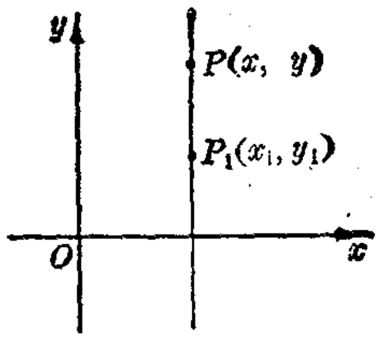


图 6-5

当直线 l 的倾斜角为 $90°$ 时, 直线的斜率不存在, 那么它的方程不能用点斜式表示. 这时直线 l 和 y 轴平行或重合, 直线上每一个点的横坐标都是 x_1(图 6-5), 它的方程是

$$x=x_1.$$

例 1 已知一直线经过点 $P_1(-2, 3)$, 倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, 求这条直线的方程, 并画出图形.

解: 直线的斜率 $k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$.

由点斜式, 得 $y-3=1\cdot(x+2)$.

整理, 得 $x-y+5=0$.

这就是所求的直线方程, 它的图形如图 6-6 所示.

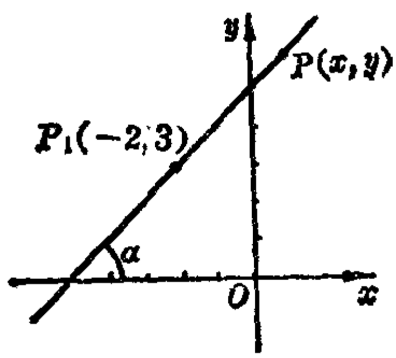


图 6-6

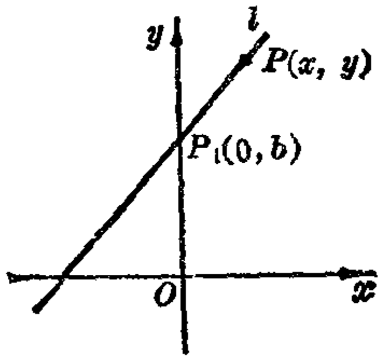


图 6-7

2. 斜截式 已知直线 l 的斜率为 k, 直线在 y 轴上的截

距为 b(图 6-7)，求直线 l 的方程.

直线 l 在 y 轴上的截距为 b，也就是直线 l 经过(O,b)点，由点斜式，得 $y-b=k(x-0)$，即

$$\boxed{y=kx+b.} \tag{2}$$

方程(2)是由直线 l 的斜率和它在 y 轴上的截距确定的，所以叫做直线方程的**斜截式**.

很明显，直线的斜截式方程是直线的点斜式方程的特殊情况，它是以直线与 y 轴的交点为已知点的点斜式方程.

练　习

1. 写出下列直线的点斜式方程，并画出图形：

(1) 经过点 $A(2,5)$，斜率是 4；

(2) 经过点 $B(3,-1)$，斜率是 $\sqrt{2}$；

(3) 经过点 $C(0,3)$，倾斜角是 $0°$；

(4) 经过点 $D(4,-2)$，倾斜角是 $120°$。

2. 已知下列直线的点斜式方程，求各直线所经过的已知点、直线的斜率和倾斜角：

(1) $y-2=x-1$；　　(2) $y-3=\sqrt{3}(x-4)$；

(3) $y+3=-(x-1)$；　　(4) $y+2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.

3. 设直线在 y 轴上的截距是 5，它与 x 轴构成的倾斜角为(1)$45°$；(2)$60°$；(3)$135°$；(4)$180°$，求这直线的方程。

3. 两点式　已知直线 l 过 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 两点

$(x_1 \neq x_2)$，求直线 l 的方程.

因为 $x_1 \neq x_2$，即直线不平行于 y 轴，则直线有确定的斜率 k，得

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

又因直线过 $P_1(x_1, y_1)$，将坐标代入点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \qquad (3')$$

当 $y_2 \neq y_1$ 时，这个方程可以写成：

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.} \qquad (3)$$

方程(3)是由直线上的两点确定的，所以叫做直线方程的**两点式**.

当 $y_2=y_1$ 时(图 6-8)，直线 l 的斜率为 0，直线 l 和 x 轴平行或重合，由(3′)式可得 $y=y_1$.

4. 截距式 已知直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 $b(a \neq 0, b \neq 0)$，求直线 l 的方程.

因为直线 l 经过 $(a, 0)$ 和 $(0, b)$ 两点，且 $a \neq 0, b \neq 0$，代入两点式方程，得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}.$$

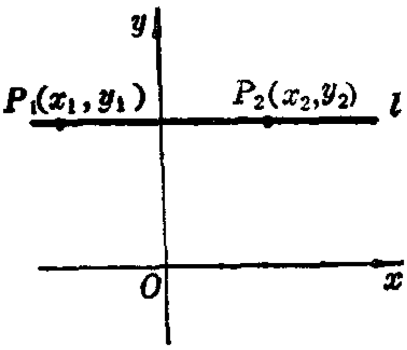


图 6-8

整理后，得

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.} \qquad (4)$$

方程(4)是由直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距确定的，所以叫做直线方程的**截距式**.

很明显，直线的截距式方程是直线两点式方程的特殊形式.

例 2 已知三角形的三个顶点是 $A(-5,0)$、$B(3,-3)$、$C(0,2)$ (图 6-9)，求这个三角形三边所在的直线方程.

解： 直线 AB 经过 $A(-5,0)$、$B(3,-3)$ 两点．由两点式，得

$$\frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-(-5)}{3-(-5)},$$

即 $$3x+8y+15=0.$$

这就是直线 AB 的方程.

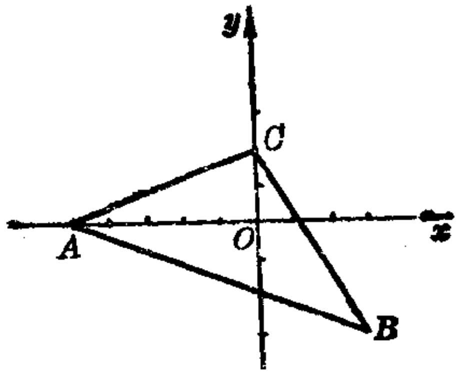


图 6-9

直线 BC 在 y 轴上的截距是 2，斜率是

$$k=\frac{2-(-3)}{0-3}=-\frac{5}{3}.$$

由斜截式得

$$y=-\frac{5}{3}x+2,$$

即 $$5x+3y-6=0.$$

这就是直线 BC 的方程.

直线 AC 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 -5、2．由截距式得

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1,$$

即 $$2x-5y+10=0.$$

这就是直线 AC 的方程.

练 习

1. 求过下列两点的直线方程，再化成斜截式方程：

   (1) $P_1(2, 1)$、$P_2(0, -3)$;

   (2) $A(0, 5)$、$B(5, 0)$;

   (3) $C(-4, -5)$、$D(0, 0)$.

2. 写出下列直线的截距式方程，并根据截距式方程作出直线：

   (1) x 轴上的截距是 2，y 轴上的截距是 3;

   (2) x 轴上的截距是 -5，y 轴上的截距是 6;

   (3) x 轴上的截距是 4，y 轴上的截距是 -3.

3. $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(0, 5)$、$B(1, -2)$、$C(-6, 4)$，求 BC 边上的中线所在直线的方程.

6.3 直线方程的一般形式

上面我们学过的几种特殊形式的直线方程，都是关于 x、y 的一次方程. 现在我们进一步学习直线方程和一般二元一次方程的关系

我们先来证明：(I) 在直角坐标系中，任何一条直线的方程都是关于 x、y 的一次方程.

我们知道，在直角坐标系中，一条直线 l 和 y 轴不是相交就是平行(或重合).

当直线 l 和 y 轴相交时，直线 l 的方程总可以用斜截式方程

$$y=kx+b$$

表示.

当直线 l 和 y 轴平行(或重合)时, 设它和 x 轴的交点为 $M(a, 0)$, 直线 l 的方程是

$$x=a.$$

它们都是含 x、y 的一次方程, 因此, 任何一条直线的方程都是关于 x、y 的一次方程.

其次, 我们证明: (II) 任何一个关于 x、y 的一次方程

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

(其中 A、B 不同时为零), 在直角坐标系中的图形都是一条直线.

分两种情况讨论:

当 $B\neq0$ 时, 方程(1)可以变形为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

这就是直线的斜截式方程, 它表示斜率为 $-\frac{A}{B}$, 在 y 轴上的截距是 $-\frac{C}{B}$ 的一条直线。特别地, 当 $A=0$ 时, 则方程变为 $y=-\frac{C}{B}$, 它的图形是平行(或重合, $C=0$ 时)于 x 轴的一条直线.

当 $B=0$ 时, 由于 A、B 不同时为零, 所以 $A\neq0$. 方程(1)可以变形为

$$x=-\frac{C}{A}.$$

当 $C\neq0$ 时, 方程表示平行于 y 轴的一条直线; 当 $C=0$ 时,

表示重合于 y 轴的一条直线.

由(I)和(II),我们证明了:在直角坐标系中,任何一条直线的方程都是关于 x 和 y 的一次方程;反之,任何一个关于 x 和 y 的一次方程都表示一条直线.

因为平面上任何一条直线的方程都可以化为(1)的形式,所以(1)式叫做直线方程的**一般式**.

例 1 把经过点 $A(6, -4)$,并且斜率等于 $-\frac{4}{3}$ 的直线的点斜式方程化成一般形式,再化成截距式.

解: 经过点 $A(6, -4)$,并且斜率等于 $-\frac{4}{3}$ 的直线的点斜式方程是

$$y+4=-\frac{4}{3}(x-6).$$

化成一般形式,得

$$4x+3y-12=0.$$

把常数项移到等号的右边,再把方程的两边都除以 12,就得这条直线的截距式方程:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

例 2 把直线 l 的方程 $x-2y+6=0$ 化成斜截式,求出直线 l 的斜率和在 x 轴与 y 轴上的截距,并画图.

解: 将原方程移项,得 $2y=x+6$. 两边同除以 y 的系数,得斜截式:

$$y=\frac{1}{2}x+3.$$

因此，直线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2}$，在 y 轴上的截距是 3.

求直线 l 在 x 轴上的截距，可在上面的方程中令 $y=0$，得

$$x=-6.$$

直线 l 在 x 轴的截距为 -6.

过直线与 x 轴、y 轴的交点 $A(-6,0)$、$B(0,3)$ 画直线，就得直线 l（图 6-10）.

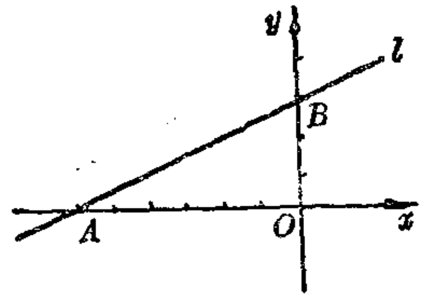


图 6-10

练 习

1. 由下列各条件，写出直线方程，并且化成一般式方程：

(1) 斜率是 $-\frac{1}{2}$，经过点 $A(8,-2)$；

(2) 经过点 $B(4,2)$，平行于 x 轴；

(3) 经过点 $C\left(-\frac{1}{2},0\right)$，平行于 y 轴；

(4) 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 $\frac{3}{2}$，-3；

(5) 经过两点 $P_1(3,-2)$、$P_2(5,-4)$；

(6) x 轴上的截距是 -7，倾斜角是 $45°$.

2. (1) 直线 $Ax+By+C=0$，在 $B\neq0$ 时，斜率是多少？在 $B=0$ 时呢？

(2) 直接写出下列直线的斜率：

$4x+5y+7=0$；　　$3x+6y-8=0$；

$x-y=0$；　　$11y-7=0$.

3. 求下列直线的斜率和在 y 轴上的截距，并画出图形：

(1) $3x+y-5=0$;

(2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$;

(3) $x+2y=0$;

(4) $7x-6y+4=0$.

*6.4　直线型经验公式

在生产和科研中，常常要根据观察或实验得到的两个变量之间关系的一系列数据，求它们之间的函数关系的表达式。由这样的实验数据所建立起来的函数关系的表达式叫做经验公式。如果经验公式可由直线方程来表示，它就叫做**直线型经验公式**。

下面举例说明求直线型经验公式的方法。

例　通过实验，测得某种铅合金的熔点(y°C)和含铅量(x%)之间关系的数据如下表：

x(%)	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
y(°C)	181	197	235	270	283	292

根据这些数据，求关于 x、y 的经验公式。

解： 把表中各组数作为点的坐标，在直角坐标系中画出这些点(图 6-11)。可以看到这些点大致在一条直线上。用透明尺的边缘在这些点间移动，使它尽量靠近或通过大多数点后，画出直线。在这条直线上选出两点，例如 $A(46.7, 197)$、$B(84.0, 283)$。把它们的坐标代入直线的两点式方程，得

$$\frac{y-197}{283-197}=\frac{x-46.7}{84.0-46.7}.$$

化简后，得到经验公式

$$y=2.3x+89.3.$$

有了这个经验公式，就可以从这种合金的含铅量求得相应的熔点，或者反过来，从这种合金的熔点求得相应的含铅量.

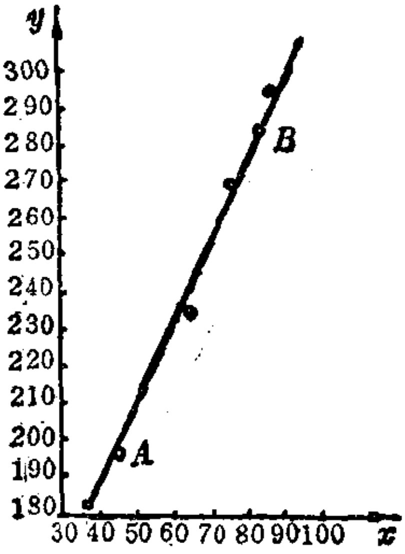


图 6-11

上面这种选择两点求直线型经验公式的方法，叫做**选点法**.

选点法虽然比较简便，但是由于选点的灵活性较大，一般精确度不高. 下面再介绍一种精确度较高的方法，叫做**平均值法**.

我们仍用上面的例题来说明平均值法. 在确定经验公式是直线型之后，可假定所求的经验公式为

$$y=kx+b.$$

把表中 x, y 的各组值代入这个方程，得到一系列的方程，把这些方程分为两组，使两组中方程的个数相同(或差一个)，再把各组方程的两边分别相加，就得到关于 k、b 的两个方程：

$$\begin{array}{rl} & 181=36.9k+b \\ & 197=46.7k+b \\ +) & 235=63.7k+b \\ \hline & 613=147.3k+3b \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 270=77.8k+b \\ & 283=84.0k+b \\ +) & 292=87.5k+b \\ \hline & 845=249.3k+3b \end{array}$$

解方程组

$$\begin{cases}613=147.3k+3b,\\845=249.3k+3b,\end{cases}$$

得 $$k\approx 2.27,\quad b\approx 92.9.$$

代入所设方程，就得到所求的经验公式

$$y=2.27x+92.9.$$

经验公式有助于把生产和科学研究中积累的经验提高到理论，进一步指导实践。

练　习

1. 丙烯腈是合成人造羊毛的原料．在研究它的比重 D 和温度 T(°C) 的关系时，通过实验得到的数据如下：

T (°C)	0	5	10	15	20	25	30
D	0.8287	0.8282	0.8276	0.8271	0.8266	0.8261	0,8255

用选点法求出 D 与 T 之间的经验公式．

2. 根据下列实验数据，用平均值法求关于 m、p 的经验公式：

m	0.03	0.06	0.10	0.14	0.17	0.20	0.25
p	0	0.42	0.93	1.60	2.08	2.41	3.31

习　题　二

1. 在 x 轴上有两点 A、A'，它们的横坐标分别是 2 和 -2，在 y 轴上有两点 B、B'，它们的纵坐标分别是 5 和 -5，求四边形 $ABA'B'$ 各边所在直线的倾斜角和斜率．
2. 根据下列条件写出直线方程，并化成一般形式：

(1) 斜率是$\frac{\sqrt{3}}{3}$，经过点$A(8,-2)$；

(2) 在x轴、y轴上的截距分别是4与-3；

(3) 过点$B(-2,0)$，且与x轴垂直；

(4) 经过两点$A(-1,8)$、$B(4,-2)$；

(5) 在y轴上的截距是2，且与x轴平行；

(6) 斜率为-4，在y轴上的截距为7。

3. 判断下列各题中的三点是不是在一条直线上：

(1) $A(6,6)$，$B(4,7)$，$C(2,8)$；

(2) $D(1,5)$，$E(0,2)$，$F(3,11)$；

(3) $M(13,-2)$，$N(5,5)$，$P(-7,6)$。

4. 菱形的两条对角线分别等于8和6，并且分别放置在x轴和y轴上，求菱形各边所在的直线方程。

5. 求两坐标轴和直线$2x+5y-20=0$所围成的三角形的面积。

6. 已知三角形三个顶点是$A(8,5)$、$B(4,-2)$、$C(-6,3)$。求它的三条中位线方程。

7. 一条直线和y轴相交于点$P(0,2)$，它的倾斜角的正弦是$\frac{4}{5}$，求这条直线的方程。这样的直线有几条？

8. 已知一次方程$\frac{3x+2}{6}-\frac{2y-5}{3}=4$，求这直线方程的(1)一般式，(2)斜截式，(3)截距式。

二　两条直线的位置关系

6.5　两条直线的夹角

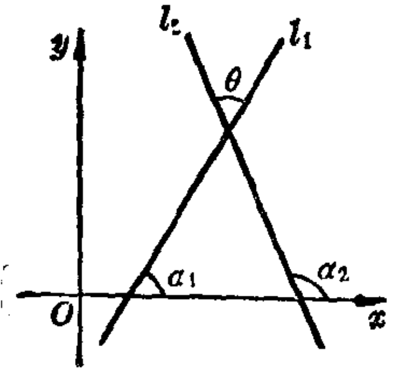
两条直线相交，可以构成四个角，我们把其中不大于直角的角叫做**两条直线所成的角**，简称两条直线的夹角．下面我们研究怎样根据两条直线的斜率，求它们的夹角．

设夹角为θ的两条直线l_1和l_2的方程是

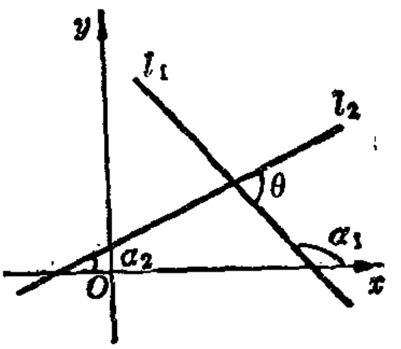
l_1: $y=k_1x+b_1$;　　l_2: $y=k_2x+b_2$.

它们的倾斜角分别是α_1、α_2，那么

$$k_1=\operatorname{tg}\alpha_1,\quad k_2=\operatorname{tg}\alpha_2.$$



甲



乙

图　6-12

下面讨论$0°<\theta<90°$的情形:

$|\alpha_1-\alpha_2|<90°$（如图 6-12 甲）时，$\theta=|\alpha_1-\alpha_2|$．有

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}|\alpha_1-\alpha_2|>0.$$

$|\alpha_1-\alpha_2|>90°$（如图 6-12 乙）时，$\theta=\pi-|\alpha_1-\alpha_2|$．有

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\pi-|\alpha_1-\alpha_2|)=-\operatorname{tg}|\alpha_1-\alpha_2|>0.$$

因而在这两种情况下，不管$\alpha_1-\alpha_2$的符号如何，都有

$$\operatorname{tg}\theta=|\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)|=\left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}\right|,$$

即

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|.}$$

当 $k_1k_2=-1$ 时公式没有意义，这时由 $\operatorname{ctg}\theta=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}=0$，可以求出 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

例 1 已知两直线 l_1: $3y-x+1=0$, l_2: $x-y-1=0$, 求 l_1 与 l_2 的夹角.

解: 设 l_1 与 l_2 的夹角 θ. 两直线的斜率为

$$k_1=\frac{1}{3},\quad k_2=1.$$

$$\therefore\qquad \operatorname{tg}\theta=\left|\frac{1-\frac{1}{3}}{1+1\times\frac{1}{3}}\right|=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\qquad \theta=26^\circ 34'.$$

即直线 l_1 与 l_2 的夹角为 $26^\circ 34'$ (图 6-13).

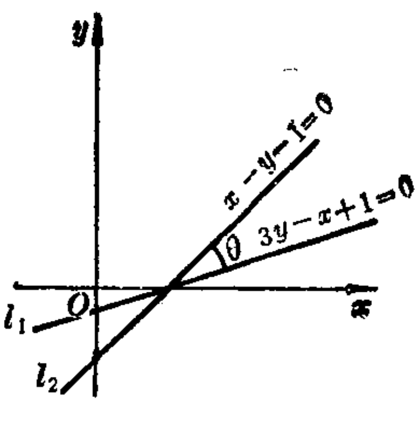


图 6-13

例 2 求直线 $2x-y+3=0$ 和 $3x+y-2=0$ 的夹角.

解: 先求出两直线的斜率:

$$k_1=2,\quad k_2=-3.$$

设所成的锐角为 θ, 那么

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{2+3}{1+2\cdot(-3)}\right|=\left|\frac{5}{-5}\right|=1.$$

所以，这两条直线的夹角为$\frac{\pi}{4}$。

练　习

1. 求直线 $y+x-2=0$ 和 $y-\sqrt{3}x=0$ 的夹角。

2. 求下列每两条直线的夹角：

(1) $x+3y-1=0$ 与 $2x-y+1=0$;

(2) $2x+3y+2=0$ 与 $3x+2y+8=0$;

(3) $3x+4y-9=0$ 与 $12x+5y-3=0$。

6.6 两条直线平行和垂直的充要条件

设两条直线 l_1 和 l_2 都不平行于 y 轴，它们的倾斜角分别是 α_1 和 α_2，斜率分别是 k_1 和 k_2。于是它们的方程可以写成如下形式：

$$l_1:\quad y=k_1x+b_1;$$

$$l_2:\quad y=k_2x+b_2.$$

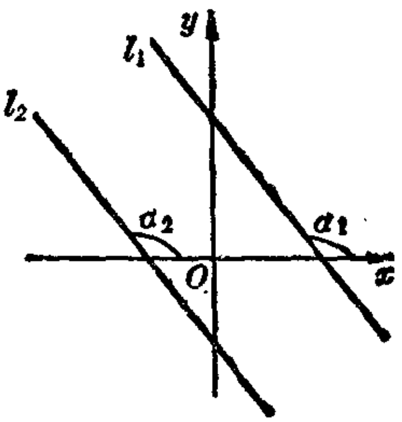


图 6-14

1. 平行条件

设两直线 $l_1 /\!/ l_2$（图 6-14），则倾斜角 $\alpha_1=\alpha_2$（同位角相等），所以 $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2$，也就是

$$k_1=k_2.$$

这就是说，如果 $l_1 /\!/ l_2$，那么 $k_1=k_2$。所以 $k_1=k_2$ 是两条直线平行的必要条件.

反之，如果 $k_1=k_2$，也就是 $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2$。

由于 $0°\leqslant\alpha_1<180°$，$0°\leqslant\alpha_2<180°$。

$\therefore \quad \alpha_1=\alpha_2,$

$\therefore \quad l_1 /\!/ l_2.$

这就是说，如果 $k_1=k_2$，那么 $l_1 /\!/ l_2$. 所以 $k_1=k_2$ 是两条直线平行的充分条件.

因此，有斜率且不重合的两条直线，平行的充要条件是斜率相等：

即
$$\boxed{l_1 /\!/ l_2 \Longleftrightarrow k_1=k_2.}$$

例如，已知两直线方程 l_1：$2x-4y+7=0$，l_2：$x-2y+5=0$. 如果将它们写成斜截式，得

$$l_1:\ y_1=\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}, \quad l_2:\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

它们的斜率 $k_1=k_2=\frac{1}{2}$，但在 y 轴上截距不等，可知这两条直线平行.

2. 垂直条件

当两直线垂直，即 $l_1 \perp l_2$ 时，它们的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，那么 $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$（图 6-15）. 由

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}=0,$$

得
$$1+k_1k_2=0.$$

$$\therefore \quad k_1k_2=-1.$$

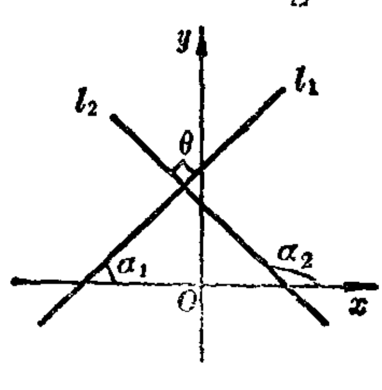


图 6-15

所以 $\quad k_1=-\frac{1}{k_2} \quad$ 或 $\quad k_2=-\frac{1}{k_1}.$

这就是说，如果 $l_1 \perp l_2$，那么它们的斜率互为负倒数。

反之，如果 l_1 和 l_2 的斜率互为负倒数，就有 $1+k_1k_2=0$，从而推出 $\operatorname{ctg}\theta=0$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$，所以 l_1 和 l_2 互相垂直。

这就是说，对于有斜率的两条直线，互相垂直的充要条件是它们的斜率互为负倒数，即

$$\boxed{l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}}.$$

例 1 证明 l_1: $2x-4y+7=0$ 与 l_2: $2x+y-5=0$ 互相垂直。

证明：这两条直线的方程可改写成

$$l_1:\ y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{4},\quad l_2:\ y=-2x+5.$$

所以它们的斜率分别是 $k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=-2$。

由 k_1 和 k_2 互为负倒数，可知这两条直线互相垂直。

例 2 已知定点 $P(1,2)$ 和定直线 l: $2x-3y+1=0$。

求：(1) 过 P 点且平行于 l 的直线方程；

(2) 过 P 点且垂直于 l 的直线方程；

(3) 过 P 点且与 l 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的直线方程。

解：化 l 为斜截式方程：$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

$$\therefore\quad k=\frac{2}{3}.$$

(1) 设 $l_1 /\!/ l$（图 6-16），则 l_1 的斜率 $k_1=k=\frac{2}{3}$.

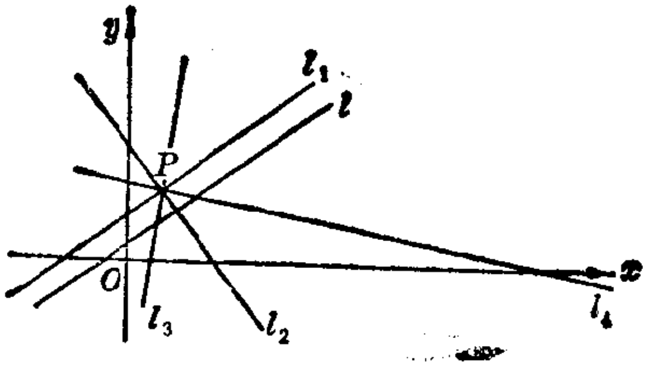


图 6-16

又 l_1 过 $P(1,2)$，由点斜式方程，得

$$y-2=\frac{2}{3}(x-1),$$

即

$$2x-3y+4=0.$$

(2) 设 $l_2 \perp l$，则 l_2 的斜率 $k_2=-\frac{1}{k}$.

$\therefore$

$$k_2=-\frac{3}{2}.$$

又 l_2 过 $P(1,2)$，由点斜式方程，得

$$y-2=-\frac{3}{2}(x-1),$$

即

$$3x+2y-7=0.$$

(3) 设所求的直线的斜率为 k'. 则

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\left|\frac{k'-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}k'}\right|.$$

$\therefore$

$$\left|\frac{k'-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}k'}\right|=1.$$

$\therefore$

$$k'-\frac{2}{3}=\pm\left(1+\frac{2}{3}k'\right).$$

解得 $$k_1'=5,\ k_2'=-\frac{1}{5}.$$

所以，要求的直线有两条(图 6-16)，它们的方程分别是

l_3: $y-2=5(x-1)$，即 $5x-y-3=0$；

l_4: $y-2=-\frac{1}{5}(x-1)$，即 $x+5y-11=0$.

练　习

1. 设直线 l_1 和 l_2 都不平行于 y 轴，它们的方程是

l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$.

求证：$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$ 是 $l_1 /\!/ l_2$ 的充要条件；$\frac{A_1}{B_1}=-\frac{B_2}{A_2}$ 是 $l_1\perp l_2$ 的充要条件.

2. 求过点 $(8,-2)$ 且与直线 $x+2y-2=0$ 平行的直线方程.
3. 求过点 $(0,-5)$ 且与直线 $x-4y-4=0$ 垂直的直线方程.
4. 已知等腰直角三角形的直角顶点是 $C\left(2\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$，斜边所在的直线方程是 $3x-y+2=0$，求两条直角边所在的直线方程.

6.7　两条直线的交点

设两条直线方程是

l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$.

如果这两条直线相交，由于交点同时在这两条直线上，交点的坐标一定同时满足这两个方程，反过来，如果有一个点的坐标同时满足这两个方程，那么这个点一定是这两条直线的交点. 因此，要求两直线 l_1 和 l_2 的交点的坐标，只需解由两直线方

程所组成的方程组：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$$

例 求下列两条直线的交点：

l_1：$x+y-1=0$，l_2：$2x-y+4=0$.

解：解方程组

$$\begin{cases}x+y-1=0,\\2x-y+4=0,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$$

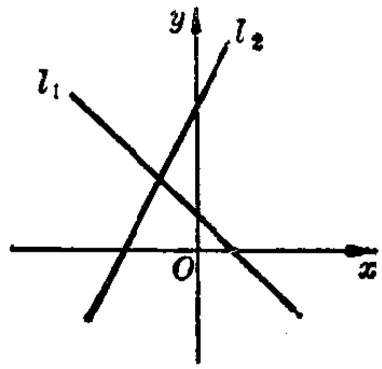


图 6-17

即 l_1、l_2 交点的坐标是$(-1,2)$，如图 6-17.

代数中学过，如果二元一次方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$$

中，$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$，那么方程组有唯一的一组解．从几何来看，这两个方程的图形各是一条直线．$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$，即$\dfrac{A_1}{B_1}\neq\dfrac{A_2}{B_2}$，表明两直线的斜率不相等，即两直线不平行，平面上的两直线不平行，则一定相交于一点.

如果$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$，那么方程组没有解，这时两直线平行，两直线没有交点.

如果$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$，方程组有无穷多解，这时两个方程可化成同一方程，它们表示的直线重合，这直线上每一个点的坐

标同时满足这两个方程.

因此,求两条直线的交点问题,就转化为求由两直线方程所组成的二元一次方程组的解的问题.

练　习

1. 求下列各对直线的交点,并作图.

 (1) l_1: $2x+3y=12$,　　l_2: $x-2y=4$;

 (2) l_1: $3x-4y+7=0$,　l_2: $x=3y$.

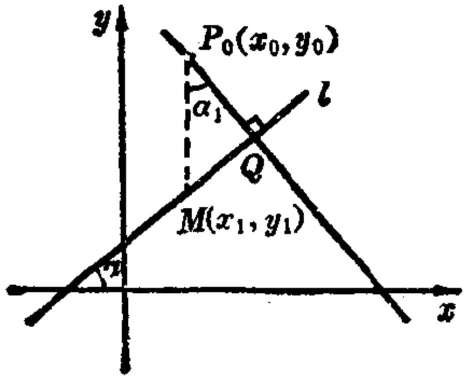
2. 求经过两条直线 $2x+y+1=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点,且平行于直线 $4x-3y-7=0$ 的直线方程.

3. A 和 C 取什么值时,直线 $Ax-2y-1=0$ 和直线 $6x-4y+C=0$: (1)平行,(2)重合,(3)相交.

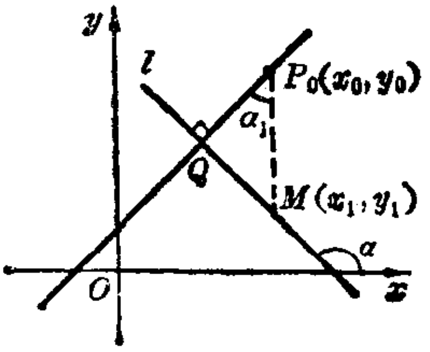
6.8　点到直线的距离

已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 和直线 l: $Ax+By+C=0$,怎样求点 P_0 到直线 l 的距离呢?

根据定义,点 P_0 到直线 l 的距离是点 P_0 到直线 l 的垂线段的长(图 6-18).



甲



乙

图　6-18

设过 P_0 作 $P_0Q\perp l$ 交于 Q 点.

设 $A\neq0$，$B\neq0$，这时直线 l 不平行于 y 轴. 过点 P_0 作 $P_0M\parallel OY$，那么 P_0M 与 l 相交于点 $M(x_1, y_1)$ (图 6-18)，而且 $x_1=x_0$.

代入直线 l 的方程可得

$$y_1=-\frac{Ax_0+C}{B}.$$

$$\therefore\quad |P_0M|=|y_0-y_1|=\left|y_0+\frac{Ax_0+C}{B}\right|$$
$$=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|B|}.$$

设直线 l 的倾斜角为 α:

当 $\alpha<90°$ 时(如图 6-18 甲)，$\alpha=\alpha_1$;

当 $\alpha>90°$ 时(如图 6-18 乙)，$\alpha_1=\pi-\alpha$.

所以，在两种情形下都有

$$\operatorname{tg}^2\alpha_1=\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{A^2}{B^2}.$$

又因为 $\alpha_1<90°$，

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}}=\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$\therefore\quad |P_0Q|=|P_0M|\cos\alpha_1=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|B|}\cdot\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

这样，我们就得到平面内一点 $P_0(x_0, y_0)$ 到一条直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式:

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}.$$

如果 $A=0$ 或 $B=0$，上面的距离公式仍然成立，但这时不需要利用公式就可以直接求出距离.

例 1 求点 $P(-1,2)$ 到直线 $2x+y-10=0$ 的距离.

解： 根据点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|2\times(-1)+1\times2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

例 2 求平行线 $2x-7y+8=0$ 和 $2x-7y-6=0$ 之间的距离.

解： 在直线 $2x-7y-6=0$ 上任取一点，例如取 $P_0(3,0)$（图 6-19），则两平行线间的距离就是 $P_0(3,0)$ 到直线 $2x-7y+8=0$ 的距离.

因此，

$$d=\frac{|2\times3-7\times0+8|}{\sqrt{2^2+(-7)^2}}=\frac{14}{\sqrt{53}}=\frac{14\sqrt{53}}{53}.$$

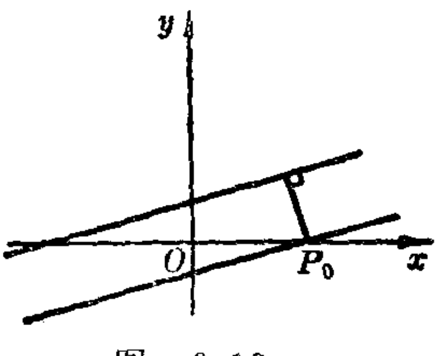


图 6-19

练 习

1. 求坐标原点到下列直线的距离：

(1) $3x+2y-26=0$； (2) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=1$；

(3) $y=7$； (4) $x=y$.

2. 求下列点到直线的距离：

(1) $A(2,3)$， $3x-4y=25$；

(2) $B(-1,1)$, $3x-4y+10=0$;

(3) $C(1,0)$, $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$;

(4) $D(-3,-4)$, $5x=0$.

3. 求下列两条平行线间的距离:

(1) $2x+3y-8=0$ 与 $2x+3y+18=0$;

(2) $3x+4y=10$ 与 $3x+4y=0$.

习 题 三

1. 求下列两直线的交点和夹角:

(1) $y=\frac{1}{2}x-5$, $y=3x+2$;

(2) $y=2x-1$, $y=-\frac{1}{2}x+8$;

(3) $y=4$, $y=x-5$.

2. 求过点 $(2,-3)$ 并且与直线 $8x-2y+3=0$ 平行的直线方程.

3. 一直线经过直线 l: $7x+2y-14=0$ 和 y 轴的交点, 并与 l 垂直, 求这条直线的方程.

4. 求通过点 $(-2,0)$ 并且和直线 $3x+4y+6=0$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$ 的直线方程.

5. 直线 $ax+2y+8=0$ 经过直线 $4x+3y=10$ 和 $2x-y=10$ 的交点, 求 a 的值.

6. 不解方程组, 判定下列方程组的解的情况:

(1) $\begin{cases}2x+y=11,\\x+3y=18;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-3y=4,\\4x-6y=8;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x+10y=16,\\6x+20y=7;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}4x+10y=12,\\6x-15y=18.\end{cases}$

7. 已知两条直线

l_1: $(3+m)x+4y=5-3m$,

l_2: $2x+(5+m)y=8$.

m 为何值时，l_1 与 l_2: (1)相交？(2)平行？(3)重合？

8. 求两条平行线 $3x-2y-1=0$ 和 $6x-4y+2=0$ 间的距离.

9. 点$(a, 6)$到直线 $3x-4y=2$ 的距离(1)等于 4；(2)大于 4. 分别求 a 的值.

小　　结

一、本章介绍了点斜式、斜截式、两点式及截距式等直线方程的四种特殊形式，并研究了直线方程的一般形式(二元一次方程)，每个二元一次方程所表示的直线有且只有一条；但表示一条直线的方程不是唯一的. 这些方程可以通过方程变形互化.

二、在解析几何中，平面上两条直线的位置关系，可利用斜率来分析.

设直线 l_1 和 l_2 的斜率分别是 k_1、k_2，则

两直线相交的夹角　　$\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$;

两直线平行条件　　$k_1=k_2$;

两直线垂直条件　　$k_1k_2=-1$.

三、通过本章的学习，进一步看到了方程与图形之间的

联系．如求两条直线的交点就是求它们的方程所组成的方程组的实数解．反过来，又可以根据方程作出它们所表示的图形，找出交点坐标，得到代数方程的近似解．

复习题六

1. 矩形的顶点为 $O(0,0)$、$A(8,0)$、$B(0,5)$、$C(8,5)$，试用几种方法求两条对角线所在直线的方程．

2. 证明：三点 $A(-2,3)$、$B(1,3)$、$C(4,-6)$ 在同一直线上．

3. 已知 $A(3,-2)$、$B(5,2)$、$C(-1,-4)$ 三点，求 $\triangle ABC$ 的面积．

4. 求经过 $A(-3,4)$ 并且在两轴上截距的和等于 12 的直线的方程．

5. 直线 $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ 和 $(5a-2)x+(a+4)y-7=0$ 互相垂直，求 a 的值．

6. 求下列各直线方程中 k 的值：

   (1) 直线 $y=kx+b$ 平行于直线 $4x+12y=7$；

   (2) 直线 $kx-y-2k=0$ 通过点 $(5,-2)$．

7. 求通过坐标原点且与直线 $y=3x+5$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 的角的直线方程．

8. 当 a 为何值时，下列方程组无解？

   (1) $\begin{cases} ax-5y=9, \\ 2x-3y=15; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2ay=1, \\ (3a-1)x-ay=1. \end{cases}$

9. 当 m 与 n 各为何值时，下列方程组有无穷多个解？

   (1) $\begin{cases} x+2y=4, \\ mx+y=n; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} mx+(n-1)y=2, \\ 3x+10y=-1. \end{cases}$

10. 已知两条直线

l: $x+(1+m)y=2-m$, l_2: $2mx+4y=-16$.

当m为何值时，l_1与l_2：(1)相交？(2)平行？(3)重合？

11. 求平行于直线$x-y-2=0$且与它的距离为$2\sqrt{2}$的直线方程。

12. 正方形的中心在$C(-1, 0)$，一条边所在的直线方程是$x+3y-5=0$，求其他三边所在的直线方程。

13. 求证：$x^2-4xy+4y^2-9=0$表示两条平行直线，并求它们之间的距离。

14. 正三角形的两个顶点是$A(2,1)$和$B(2,5)$，求第三个顶点C。

第七章　二次曲线

在平面直角坐标系中，一般二元二次方程

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$　（A、B、C 不同时为0）

所确定的曲线，称为**二次曲线**．二次曲线包括圆、椭圆、双曲线和抛物线等，在生产和科研工作中有着广泛的应用．

一　圆

7.1　圆的方程

我们知道，平面内与定点距离等于定长的点的集合（轨迹）是圆．定点就是圆心，定长就是半径．

根据圆的定义，我们来求圆心是 $C(a, b)$、半径是 r 的圆的方程．设 $M(x, y)$ 是圆上任意一点．根据圆的定义，点 M 到圆心的距离等于 r（图 7-1）．圆就是集合

$$P=\{M:|MC|=r\}.$$

由两点间距离公式，点 M 适合的条件可表示为

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r. \qquad (1)$$

把(1)式两边平方，得

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.} \qquad (2)$$

这就是圆心是 $C(a, b)$，半径是 r 的圆的方程．

方程(2)叫做圆的标准方程.

当圆心在原点 $O(0,0)$ 时,圆的方程是:

$$x^2+y^2=r^2.$$

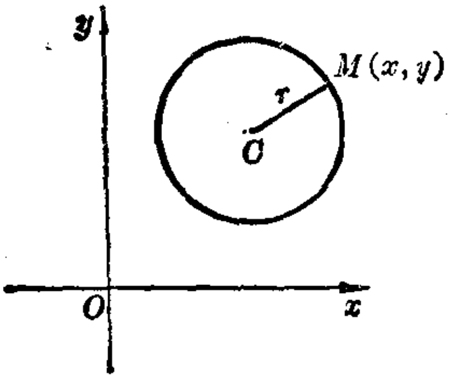


图 7-1

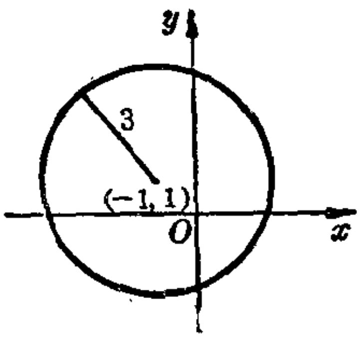


图 7-2

例 1 写出圆心在 $C(-1,1)$ 点、半径为 3 的圆的方程,并画出图形.

解: 将圆心坐标和半径代入圆的标准方程,得

$$(x+1)^2+(y-1)^2=3^2.$$

它的图形如图 7-2.

例 2 已知两点 $P_1(4,9)$ 和 $P_2(6,3)$, 求以 P_1P_2 为直径的圆的方程,并且判断点 $M(6,9)$、$N(3,3)$、$Q(5,3)$ 是在圆上,在圆内,还是在圆外.

解: 根据已知条件,圆心 C 是 P_1P_2 的中点, 那么它的坐标为

$$x_1=\frac{4+6}{2}=5, \quad y_1=\frac{9+3}{2}=6.$$

由两点间距离公式,求得圆的半径是

$$r=|CP_1|=\sqrt{(4-5)^2+(9-6)^2}=\sqrt{10}.$$

由(2)式,得圆的方程是

$$(x-5)^2+(y-6)^2=10.$$

分别计算$M(6,9)$、$N(3,3)$、$Q(5,3)$与圆心C的距离，得

$$|CM|=\sqrt{(6-5)^2+(9-6)^2}=\sqrt{10},$$
$$|CN|=\sqrt{(3-5)^2+(3-6)^2}=\sqrt{13}>\sqrt{10},$$
$$|CQ|=\sqrt{(5-5)^2+(3-6)^2}=\sqrt{9}<\sqrt{10}.$$

因此，点M在圆上，点N在圆外，点Q在圆内.

下面我们来研究圆的方程的一般形式.

将方程(2)中的括弧展开并移项，得

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0.$$

如果令

$$D=-2a,\ E=-2b,\ F=a^2+b^2-r^2,$$

则方程(2)可以写成

$$\boxed{\boldsymbol{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.}} \tag{3}$$

可见，任何一个圆的方程都可以写成方程(3)的形式，反过来，形如(3)的方程，一般的情况下，表示一个圆. 这是因为方程(3)经过配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

1. 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，比较方程(3)和方程(2)，可以看出方程(3)表示以$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$为圆心、$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$为半径的圆.

2. 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程(3)只有实数解$x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，所以它表示一个点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.

3. 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程(3)无实数解，因而它不表示任何曲线.

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程(3)表示圆，它叫做**圆的一般方程**. 标准方程的优点在于它明确地指出了圆心和半径，而一般方程突出了方程形式上的特点：

(1) x^2 和 y^2 的系数相同，不等于零；

(2) 没有 xy 这样的二次项.

以上两点是一般二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

表示圆的必要条件.

例 3 判定方程 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 所表示的曲线形状.

解：因为已知方程中 x^2 和 y^2 的系数相同，且没有 xy 项，将方程的左边进行配方，得

$$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2.$$

因此，原方程表示以 $C(1,-2)$ 为圆心、3 为半径的圆.

例 4 求过三点 $O(0,0)$、$M_1(1,1)$、$M_2(4,2)$ 的圆的方程.

解：设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为已知 O、M_1、M_2 在圆上，将它们的坐标分别代入方程，得

$$\begin{cases} F=0, \\ D+E+F+2=0, \\ 4D+2E+F+20=0. \end{cases}$$

$$\because \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以方程组有唯一解：$F=0, D=-8, E=6$.

所求圆的方程是：

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

由这个例子可以看出，通过不共线的三点可以确定一个圆.

练　习

1. 圆的标准方程和一般方程是怎样的？它们各有什么特点？
2. 求圆心在点 $C(3, -5)$、半径等于 4 的圆的方程.
3. 求圆 $3x^2+3y^2-6x+6y=6$ 的圆心和半径.
4. 求过三点 $(2, 2)$、$(5, 3)$ 和 $(3, 1)$ 的圆的方程.
5. 求经过两点 $A(5, 2)$、$B(-3, 0)$，圆心在 y 轴上的圆的方程，并画出图形.

7.2　两曲线的交点

由曲线方程的定义我们知道，两条曲线交点的坐标一定是两条曲线方程的公共实数解，也就是以这两条曲线的方程所组成的方程组的实数解；反过来，以方程组的实数解为坐标的点，同时在两个方程的曲线上，所以，一定是这两个方程的曲线的交点. 因此，要求曲线的交点的坐标，只要求出方程组的实数解就可以了. 如果方程组没有实数解，那么这两条曲线就没有交点.

例1 求方程 $x^2+y^2=25$ 和 $2x-y+5=0$ 所表示的曲线的交点.

解: $\begin{cases} x^2+y^2=25, & (1) \\ 2x-y+5=0. & (2) \end{cases}$

从(2)解出 $y=2x+5$, 代入(1), 得

$$x^2+(2x+5)^2=25,$$

即

$$x^2+4x=0.$$

解得 $x_1=0$, $x_2=-4$.

将 x_1、x_2 的值分别代入(2), 得 $y_1=5$, $y_2=-3$.

所求交点为 $A(0,5)$, $B(-4,-3)$.

例2 已知两点 $O(0,0)$、$A(70,70)$, 点 B 到 O、A 的距离都是50, 求 B 的位置.

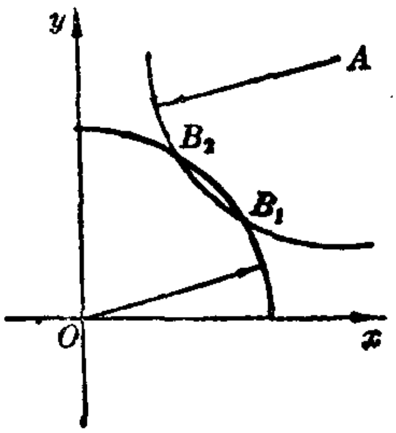


图 7-3

解: 由 $BO=50$ 可知, 点 B 在圆心为 O、半径为50的圆上(图7-3), 所以, 它的坐标满足方程

$$x^2+y^2=50^2.$$

同时, $BA=50$, 所以点 B 的坐标又满足方程

$$(x-70)^2+(y-70)^2=50^2.$$

为求点 B 的坐标, 我们解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=50^2, \\ (x-70)^2+(y-70)^2=50^2. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1=40, \\ y_1=30; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=30, \\ y_2=40. \end{cases}$

因此, 所求点 B 的位置是 $B_1(40,30)$ 和 $B_2(30,40)$.

练　习

求下列方程的曲线的交点：

(1) $x+y=20$,　　$2x-y=0$;

(2) $2x-y-1=0$,　$x^2-y=0$;

(3) $x^2-4y=0$,　　$x^2+y^2=12$;

(4) $y=x+2$,　　$x^2+y^2=2$.

习　题　四

1. 求下列各圆的方程，并画出它的图形：

   (1) 过点 $C(-1,1)$ 和 $D(1,3)$，圆心在 x 轴上；

   (2) 过直线 $x+3y+7=0$ 与 $3x-2y-12=0$ 的交点，圆心为点 $C(-1,1)$；

   (3) 过点 $A(5,2)$ 和 $B(3,\ -2)$，圆心在直线 $2x-y=3$ 上.

2. 求下列各圆的一般方程：

   (1) 过点 $A(5,1)$，圆心在点 $C(8,-3)$；

   (2) 过三点 $A(-1,5)$、$B(5,5)$、$C(6,-2)$.

3. 求下列各圆的圆心坐标和半径：

   (1) $x^2+y^2-2x-5=0$;　(2) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$;

   (3) $x^2+y^2+2ax=0$;　　(4) $x^2+y^2-2by-2b^2=0$.

4. 求直线 $4x-3y=50$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 的交点，研究它们的位置关系.

5. 一个圆经过两个圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2+2x=0$ 的交点及点 $A(3,2)$. 求这个圆的方程.

6. 求经过两圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的

交点，并且圆心在直线 $x-y-4=0$ 上的圆的方程；

7. 求证：两圆 $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ 和 $x^2+y^2+12x+6y-19=0$ 相切。

二 椭 圆

7.3 椭圆及其标准方程

取一条定长的线，两端用小钉固定在纸面上的两点 F_1 和 F_2 上，然后用铅笔尖绷紧线，循线在纸面上画曲线，那么，所画出的曲线就是椭圆，如图 7-4.

从上面画图可以看出，到两定点的距离的和是一定长，这是椭圆上任意一点的特征，由这一几何特征，可得椭圆的定义：

平面内到两个定点的距离的和等于常数（大于两定点间的距离）的点的轨迹叫做**椭圆**. 这两个定点叫做椭圆的**焦点**，焦点间的距离叫做**焦距**.

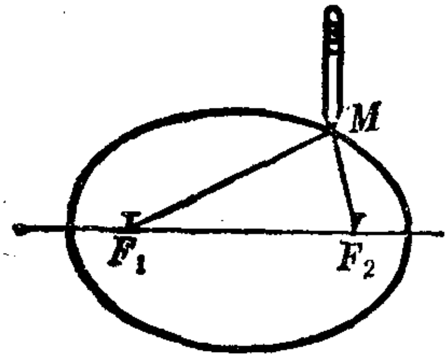


图 7-4

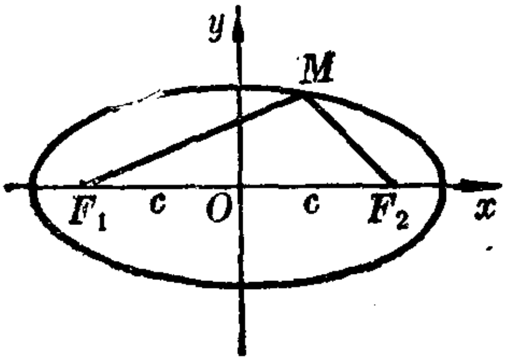


图 7-5

根据椭圆的定义，我们来求椭圆的方程.

取过焦点 F_1、F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系（图 7-5）.

设$M(x, y)$是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为$2c(c>0)$，M到F_1和F_2的距离的和等于常数$2a$，则F_1、F_2的坐标分别是$(-c, 0)$、$(c, 0)$.

因椭圆就是集合

$$P=\{M: |MF_1|+|MF_2|=2a\}.$$

根据距离公式

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

得方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

将这个方程移项、两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

再移项并整理，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

两边再平方

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

整理，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

因为$a>c$，所以$a^2-c^2>0$.

设$a^2-c^2=b^2(b>0)$，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

两边除以a^2b^2，得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\quad (a>b>0)}$$

这个方程叫做**椭圆的标准方程**. 它所表示的椭圆的焦点在x轴上，焦点是$F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$，这里

$$c^2=a^2-b^2.$$

例 1 设椭圆的焦点是 $F_1(4, 0)$ 与 $F_2(-4, 0)$, $2a=10$, 试求椭圆的标准方程.

解: 设所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 由已知条件, $c=4, a=5$, 于是

$$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9.$$

所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

例 2 已知椭圆焦距是 $2c$, 长轴是 $2a$, 根据椭圆的定义, 用直尺和圆规画出椭圆的点再连成椭圆.

画法: (1) 作线段 $F_1F_2=2c$, 在 F_1F_2 和 F_2F_1 的延长线上, 由 F_1F_2 的中点 O, 分别截取 OA、OA', 使 $OA=OA'=a$ (图 7-6).

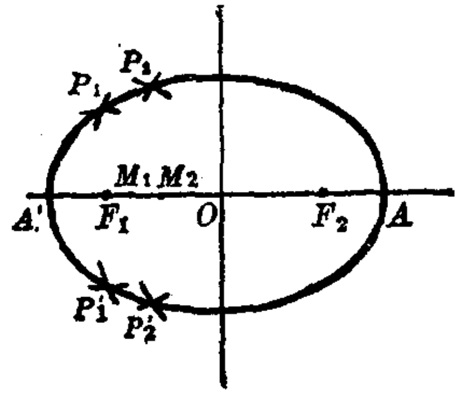


图 7-6

(2) 在线段 $A'A$ 上任取一点 M_1, 分别以 F_1、F_2 为圆心, $A'M_1$、AM_1 为半径画弧, 交于点 P_1、P_1'. 改变 M_1 的位置, 例如 M_2, $M_3\cdots$, 用同样方法画出点 P_2、P_2', P_3、$P_3'\cdots$.

(3) 把 A'、P_1、P_2、$\cdots$、A、$\cdots P_2'$、P_1'、A' 顺次连成光滑曲线, 就得到所求的椭圆.

练 习

1. 试述椭圆的定义. 它的标准方程是怎样推导的?

2. 求下列椭圆的焦点：

(1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$;　　(2) $x^2+9y^2=81$.

3. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) $a=4, b=1$, 焦点在 x 轴上；

(2) $a=4, c=\sqrt{12}$, 焦点在 x 轴上；

(3) $b=2$, 经过点 $A(-3, 0)$, 焦点在 x 轴上。

7.4 椭圆的性质

在本节中，我们将根据椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (a>b>0) \tag{1}$$

来研究椭圆的性质.

1. 范围

由方程(1)可知，椭圆上点的坐标 (x, y) 都适合关系式

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1, \qquad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即　　$x^2\leqslant a^2, \ y^2\leqslant b^2$,

∴　　$|x|\leqslant a, \ |y|\leqslant b$.

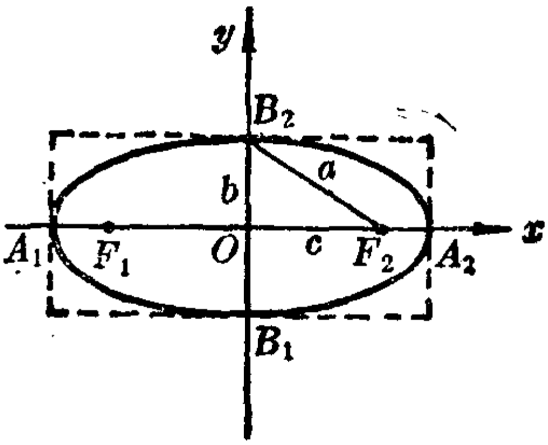


图 7-7

这说明椭圆位于直线 $x=\pm a, y=\pm b$ 所围成的矩形里(图 7-7).

2. 对称性

因为在方程(1)中以 $-y$ 代 y, 或以 $-x$ 代 x, 方程(1)都不变，所以椭圆是关于 x 轴和 y 轴为对称轴的图形. 以 $-x$、$-y$ 同时代 x、y, 方程(1)也不变，所以椭圆又是关于原点成中心

对称的图形，原点是椭圆的对称中心，椭圆的对称中心叫做椭圆的**中心**.

3. 顶点

在方程(1)中，令 $x=0$，得 $y=\pm b$. 这说明 $B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$是椭圆和 y 轴的两个交点. 同理，令 $y=0$ 时，$x=\pm a$，$A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$是椭圆和 x 轴的两个交点. 因为 x 轴、y 轴是椭圆的对称轴，所以椭圆和它的对称轴有四个交点.

椭圆和对称轴的这四个交点，叫做椭圆的**顶点**.

线段 A_1A_2、B_1B_2 分别叫做椭圆的**长轴**和**短轴**. 它们的长分别等于 $2a$ 和 $2b$，a 和 b 分别叫做椭圆的**长半轴**和**短半轴**.

4. 离心率

椭圆的焦距与长轴的比 $e=\dfrac{c}{a}$，叫做**椭圆的离心率**.

因为 $a>c>0$，所以 $0<e<1$. e 越大，越接近于 1，则 c 越接近于 a，从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 越小，因此椭圆越扁；反之，e 越小，越接近于 0，c 也越接近于 0，从而 b 越接近于 a，因此椭圆就越接近于圆.

在椭圆的标准方程中，如果 $a=b$，那么方程变为

$$x^2+y^2=a^2,$$

椭圆就变为圆了.

例 1 求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标，并用描点法画出它的图形.

解： 把已知方程化成标准方程

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$

这里，$a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{25-16}=3$.

因此，椭圆的长轴和短轴分别是 $2a=10$，$2b=8$，离心率 $\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0.6$，两个焦点分别是 $F_1(-3, 0)$ 和 $F_2(3, 0)$，椭圆的四个顶点是 $A_1(-5, 0)$、$A_2(5, 0)$、$B_1(0, -4)$、$B_2(0, 4)$。

将已知方程变形为 $y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$。根据

$$y=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2},$$

在第一象限 $x\leqslant5$ 的范围内算出几个点的坐标 (x, y)：

x	0	1	2	3	4	5
y	4	3.9	3.7	3.2	2.4	0

先描点画出椭圆在第一象限内的图形，再利用椭圆的对称性画出整个椭圆(图 7-8)。

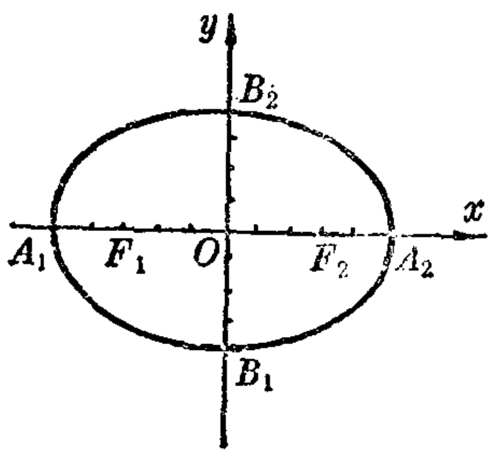


图 7-8

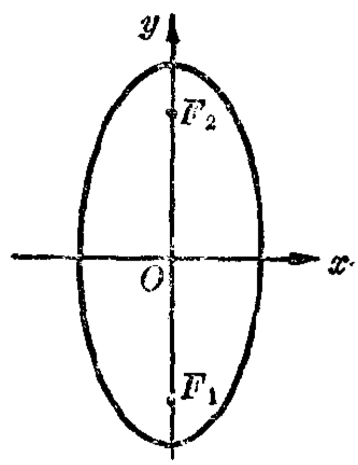


图 7-9

如果椭圆的中心在原点，焦点在 y 轴上，那么，它的方程就是

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1. \qquad (a>b>0) \qquad (2)$$

方程(2)是将方程(1)的 x、y 互换所得到的. 它的长轴的长是 $2a$, 短轴的长是 $2b$, 焦点在 y 轴上, 焦点是 $F_1(0, -c)$ 和 $F_2(0, c)$, 离心率 $e=\frac{c}{a}(c=\sqrt{a^2-b^2})$.

我们把方程 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 也叫做椭圆的标准方程(图 7-9).

例 2 求椭圆 $9x^2+4y^2=36$ 的长轴和短轴的长、离心率和焦点的坐标.

解: 把已知方程化成标准方程:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

这是焦点在 y 轴上、中心在原点的椭圆方程, $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. 因此它的长轴和短轴的长分别是 $2a=6$ 和 $2b=4$, 离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. 两焦点 F_1 和 F_2 的坐标分别是 $(0, -\sqrt{5})$ 和 $(0, \sqrt{5})$.

例 3 我国发射的第一颗人造地球卫星的运行轨道, 是以地球的中心为一个焦点的椭圆, 近地点 A 距地面 439 公里, 远地点 B 距地面 2384 公里, 地球半径约为 6371 公里. 求卫星的轨道方程.

解: 选取坐标系如图 7-10, F_2 为地球的中心.

$$a-c=OA-OF_2=F_2A=6371+439=6810,$$

$$a+c=OB+OF_2=F_2B=6371+2384=8755.$$

解得 $$a=7782.5,\quad c=972.5.$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)(a-c)}=\sqrt{8755\times 6810}$$

$$=7721.5.$$

因此, 卫星轨道的近似方程是:

$$\frac{x^2}{7783^2}+\frac{y^2}{7722^2}=1.$$

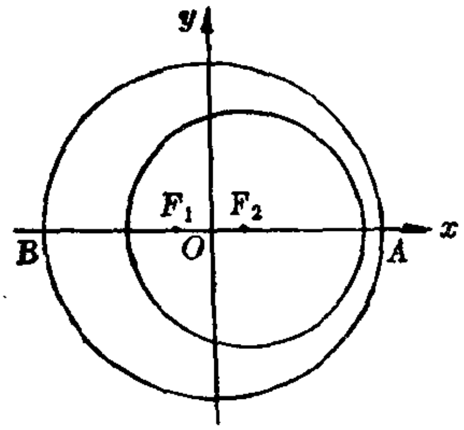


图 7-10

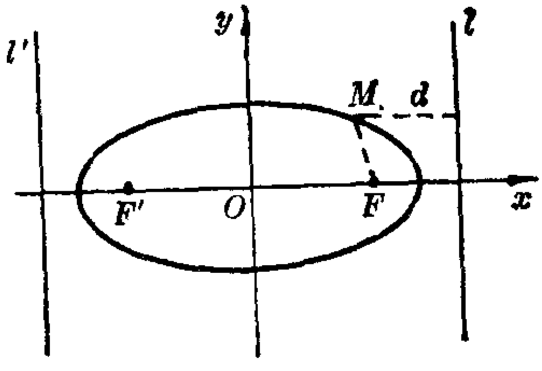


图 7-11

例 4 点$M(x, y)$到定点 $F(c, 0)$的距离和它到定直线l: $x=\frac{a^2}{c}$的距离的比是常数$\frac{c}{a}$($a>c>0$). 求点 M 的轨迹(图 7-11).

解: 所求轨迹就是集合

$$P=\left\{M:\frac{|MF|}{d}=\frac{c}{a}\right\},$$

其中 d 是点M到直线 l 的距离. 根据距离公式, 得

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|\frac{a^2}{c}-x\right|}=\frac{c}{a}.$$

将上式化简, 得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

设 $a^2-c^2=b^2$, 就可化成

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这是椭圆的标准方程, 所以点M的轨迹是椭圆.

由例 4 可知, 点M到一个定点的距离和它到一条定直线

的距离的比是常数 $e=\frac{c}{a}(e<1)$时，这个点的轨迹是椭圆. 定点是椭圆的焦点，定直线叫做椭圆的**准线**，常数 e 是椭圆的离心率。

对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，相应于焦点 $F(c,0)$的准线方程是 $x=\frac{a^2}{c}$. 根据椭圆的对称性，相应于焦点$F'(-c,0)$的准线方程是 $x=-\frac{a^2}{c}$。

练　习

1. 求下列各椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点坐标、顶点坐标和准线方程，并画出草图.

   (1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;　　(2) $9x^2+y^2=81$;

   (3) $x^2+4y^2=16$;　　(4) $2x^2=1-y^2$.

2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

   (1) $a=6, e=\frac{1}{3}$, 焦点在 x 轴上；

   (2) $c=3, e=\frac{3}{5}$, 焦点在 y 轴上；

3. 地球绕太阳运行的轨道是一个椭圆，而太阳在它的一个焦点上，太阳到长轴的两端点的距离分别约为 144 和149 百万公里，求地球轨道的离心率.

习　题　五

1. 椭圆的焦点到椭圆长轴的两端的距离分别是 2 和7，求椭

圆的标准方程.

2. 求椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$上一点$M_1(2.4, 4)$与焦点的距离.

3. 求适合下列条件的椭圆的标准方程:

(1) 长轴和短轴都在坐标轴上,椭圆过下列两点:

$P(-2\sqrt{2}, 0)$, $Q(0, \sqrt{5})$;

(2) 焦点坐标是$(-2\sqrt{3}, 0)$和$(2\sqrt{3}, 0)$, 并且经过点$P(\sqrt{5}, -\sqrt{6})$.

4. 讨论下列椭圆的范围,并画出草图:

(1) $4x^2+y^2=16$; (2) $5x^2+9y^2=100$.

5. 我国发射的科学实验人造地球卫星的运行轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆,近地点距地面266公里,远地点距地面1826公里. 求这颗卫星的轨道方程.

6. 彗星"紫金山一号"是南京天文台发现的. 它的运行轨道是以太阳为一个焦点的椭圆. 测得轨道的近日点距太阳中心1.486天文单位,远日点距太阳中心5.563天文单位(1天文单位是太阳到地球的平均距离, 约1.5亿公里),求椭圆的方程.

7. 点P到一定点$F(2,0)$的距离和它到一定直线$x=8$的距离的比是$1:2$, 求点P的轨迹方程, 并说明轨迹是什么图形.

8. $\triangle ABC$的底边的两端点是$B(0,6)$和$C(0,-6)$,另两边的斜率的积是$-\frac{4}{9}$. 求顶点A的轨迹方程.

9. 已知直线和椭圆的方程如下,求它们的交点坐标:

(1) $3x+10y-25=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$;

(2) $3x-y+2=0$. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

10. 已知两椭圆的方程是 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, $a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0$. 求证：这两个椭圆的交点在以原点为中心的圆周上。

三 双曲线

7.5 双曲线及其标准方程

我们知道，与两定点的距离的和为常数的点的轨迹是椭圆，那么与两定点的距离的差为常数的点的轨迹又是怎样的曲线？这就是我们在下面要讨论的问题.

平面内到两个定点的距离的差的绝对值是常数（小于两定点间的距离）的点的轨迹叫做**双曲线**，这两个定点叫做双曲线的**焦点**，焦点间的距离叫做**焦距**.

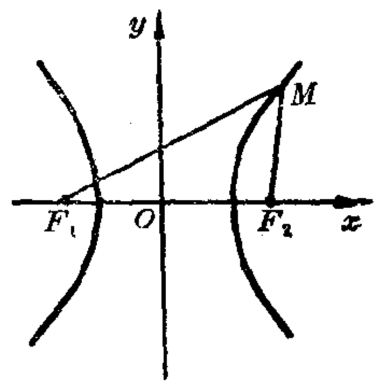


图 7-12

和建立椭圆方程一样选定坐标系，取过焦点 F_1、F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴（图 7-12）.

设 $M(x, y)$ 是双曲线上的任一点，双曲线的焦距是 $2c(c>0)$，那么 F_1、F_2 的坐标分别是 $(-c, 0)$、$(c, 0)$. 又设点 M 到 F_1 和 F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a(a>0)$.

双曲线也就是集合

$$P=\{M:|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a\}.$$

根据距离公式

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

可得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

把这个方程化简，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

由双曲线的定义 $2c>2a$，即 $c>a$. 所以 $c^2-a^2>0$，设 $c^2-a^2=b^2(b>0)$，代入上式得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

也就是

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.} \qquad (1)$$

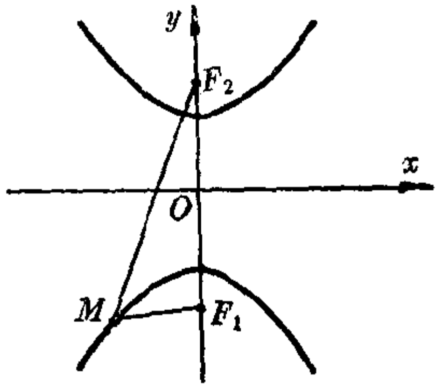


图 7-13

这个方程叫做**双曲线的标准方程**，它所表示的双曲线的焦点在 x 轴上，焦点是 $F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$，这里 $c^2=a^2+b^2$.

如果双曲线的焦点在 y 轴上(图 7-13)，焦点是 $F_1(0, -c)$、$F_2(0, c)$，只要将方程(1)的 x, y 互换就可以得到它的方程. 这时方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

例 已知两点 $F_1(-5, 0)$、$F_2(5, 0)$，求与它们的距离的差的绝对值是 6 的点的轨迹方程.

解：按定义，所求点的轨迹方程是双曲线. 因为 $c=5$，$a=3$，所以

$$b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=16.$$

因此，所求方程是

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1.$$

练　习

1．求适合下列条件的双曲线标准方程：

(1) $a=4, b=3$，焦点在 x 轴上；

(2) 焦距等于 14，$a=6$，焦点在 x 轴上；

(3) $a=2\sqrt{5}$，经过点 $A(2,-5)$，焦点在 y 轴上.

2．证明：椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $x^2-15y^2=15$ 的焦点相同.

7.6 双曲线的性质

我们根据双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

来研究它的性质.

1．范围

由方程(1)可知，对于双曲线上点 (x, y) 而言，当 x 和 y 取任何实数 x、y 时都满足关系式 $\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$，即 $x^2\geqslant a^2$.

$$\therefore\quad x\geqslant a \text{ 或 } x\leqslant -a.$$

这说明双曲线在两条直线 $x=a$ 和 $x=-a$ 的外侧.

2．对称性

双曲线关于每个坐标轴和原点都是对称的．这时，坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心．双曲线的

对称中心叫做双曲线的中心.

3. 顶点

在方程(1)中, 令 $y=0$, 得 $x=\pm a$. 因此双曲线和 x 轴有两个交点 $A_1(-a, 0)$ 和 $A_2(a, 0)$. 它们叫做双曲线的**顶点**.

令 $x=0$, 得 $y^2+b^2=0$, 这个方程没有实根, 说明双曲线和 y 轴没有交点, 但我们也把 $B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$ 画在 y 轴上(图 7-14).

线段 A_1A_2 叫做双曲线的**实轴**, 它的长等于 $2a$, a 叫做双曲线的**实半轴**. 线段 B_1B_2 叫做双曲线的**虚轴**, 它的长等于 $2b$, b 叫做双曲线的**虚半轴**.

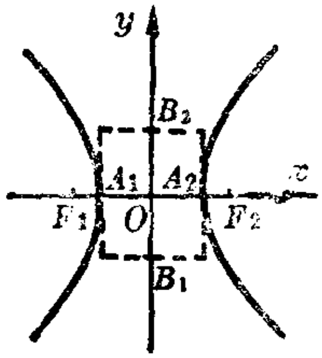


图 7-14

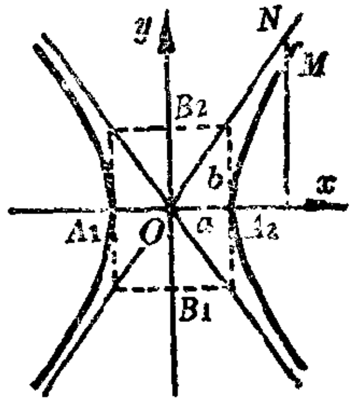


图 7-15

4. 渐近线

经过 A_2、A_1 作 y 轴的平行线 $x=\pm a$, 经过 B_2、B_1 作 x 轴的平行线 $y=\pm b$, 这四条直线围成一个矩形(图 7-15). 矩形的两条对角线方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$. 从图 7-15 可以看出, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的各支向外延伸时, 与这两条对角线逐渐接近.

事实上, 双曲线在第一象限内的一部分的方程可写为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \quad (x>a)$$

设 $M(x, y)$ 是它上面的点，$N(x, Y)$ 是直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上与 M 有相同横坐标的点．这时

$$|MN|=Y-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

在第一象限内，当 x 逐渐增大时，$|MN|$ 逐渐减小，x 无限增大，$|MN|$ 接近于零．从上式可以看出 $Y-y$ 恒大于零，就是说，双曲线在第一象限的部分从直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的下方逐渐接近于射线 ON 而永远也不会和直线 $y=\frac{b}{a}x$ 相交．对于其他象限也可以得出类似的情况．

我们把直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线的**渐近线**．

在方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，如果 $a=b$，那么双曲线的标准方程变成方程：

$$x^2-y^2=a^2.$$

这个方程所表示的曲线叫做**等轴双曲线**，它的渐近线显然是 $y=\pm x$．

5．离心率

双曲线的焦距与实轴的比 $e=\frac{c}{a}$，叫做**双曲线的离心率**．因为 $c>a$，所以双曲线的离心率 $e>1$．

由等式 $c^2-a^2=b^2$ 可得

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\sqrt{e^2-1}.$$

因此 e 越大，$\frac{b}{a}$ 越大，即渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大，这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔．由此可知，双曲线的离心率越大，它的开口就越开阔．

例 1 求双曲线 $9y^2-16x^2=144$ 的实半轴、虚半轴、焦点坐标、离心率和渐近线方程．

解：把方程化为标准方程

$$\frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1.$$

由此可知，实半轴 $a=4$，虚半轴 $b=3$．

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

焦点的坐标是 $(0,-5)$，$(0,5)$．

离心率 $$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}.$$

渐近线方程为 $$x=\pm\frac{3}{4}y,\ 即\ y=\pm\frac{4}{3}x.$$

例 2 已知双曲线方程为 $x^2-4y^2=16$，试作出它的图象．

解：将方程化为 $$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1.$$

可知实半轴 $a=4$，虚半轴 $b=2$，作出直线 $x=\pm4$，$y=\pm2$ 所围成的矩形，它的对角线所在的直线就是双曲线的渐近线，它的方程为

$$y=\pm\frac{1}{2}x.$$

由方程 $x^2-4y^2=16$ 解得

$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16}.$$

根据这个关系式，在第一象限 $x\geqslant a$ 的范围内算出 x、y 的几组对应值列表如下：

x	4	5	6	7
y	0	1.5	2.2	2.9

再根据双曲线的渐近线和它的对称性，画出双曲线图形(图 7-16)。

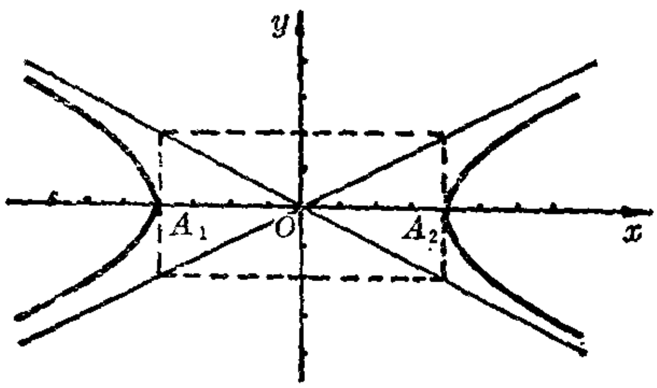


图 7-16

例 3 双曲线型自然通风塔的外形，是双曲线绕其虚轴旋转所成的曲面(图 7-17)，它的最小半径为 12 米，上口半径为 13 米，下口半径为 25 米，高 55 米。求在所给的坐标系中双曲线的方程，

解： 在图 7-17 的坐标系中，双曲线的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

点 A 旋转所成的圆半径最小，$a=12$。下面求 b。

设 B 是双曲线上位于通风塔下口的一点，它的坐标为 $(25,\ y_1)$；C 是双曲线上位于通风塔上口的一点，它的坐标为

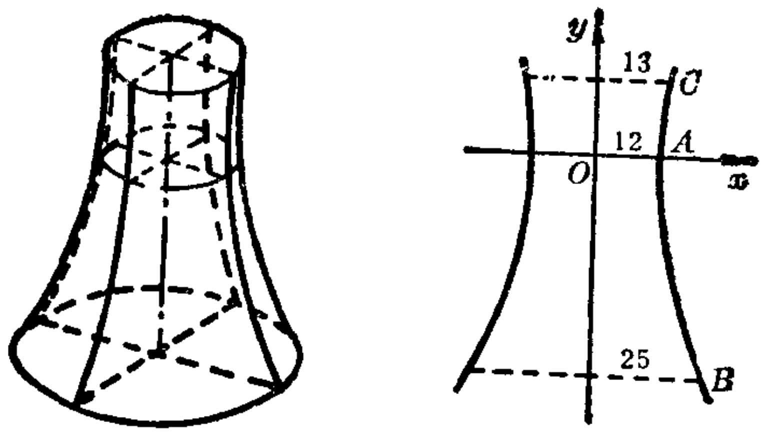


图 7-17

$(13, y_2)$. 因为 B、C 在双曲线上，所以

$$\frac{25^2}{12^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{13^2}{12^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1.$$

解得 $$y_1=-\frac{b}{12}\sqrt{25^2-12^2}=-\frac{b}{12}\sqrt{481},$$

$$y_2=\frac{b}{12}\sqrt{13^2-12^2}=\frac{5}{12}b.$$

因为塔高 55 米，所以 $y_2-y_1=55$，即

$$\frac{5b}{12}+\frac{b\sqrt{481}}{12}=55.$$

解得

$$b\approx 24.5(\text{米}).$$

所以双曲线方程(近似)为

$$\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{24.5^2}=1.$$

例 4 点 $M(x, y)$ 到定点 $F(c, 0)$ 的距离和它到直线 l: $x=\frac{a^2}{c}$ 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}$ $(c>a>0)$，求点 M 的轨迹(图

7-18).

解: 所求轨迹就是集合

$$P=\left\{M:\frac{|MF|}{d}=\frac{c}{a}\right\},$$

其中 d 是M到 l 的距离. 由距离公式

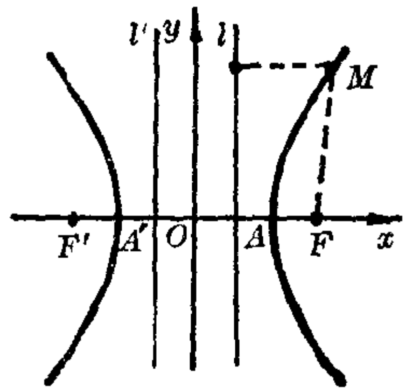


图 7-18

得
$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}.$$

将上式化简, 得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2\cdot(c^2-a^2).$$

设 $c^2-a^2=b^2$, 就可化为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

这是双曲线的标准方程.

因此, 点M到一个定点的距离和它到一条定直线的距离的比是常数 $e=\frac{c}{a}(e>1)$时, 这个点的轨迹是双曲线, 定点是焦点, 定直线叫做双曲线的准线, 常数 e 是双曲线的离心率.

对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 相应于焦点 $F(c, 0)$的准线方程是 $x=\frac{a^2}{c}$. 根据双曲线的对称性, 相应于焦点 $F'(-c, 0)$的准线方程是 $x=-\frac{a^2}{c}$.

因为$\frac{a}{c}<1$, 所以$\frac{a^2}{c}<a$. 这就是说, 双曲线的两条准线是在它的两个顶点 $A(a, 0)$和 $A'(-a, 0)$的中间, 如图 7-18.

练　习

1. 求下列双曲线的实轴和虚轴的长、顶点和焦点坐标、离心率、渐近线方程和准线方程:

   (1) $x^2-8y^2=32$;　　(2) $9x^2-y^2=81$;

   (3) $x^2-y^2=-4$;　　(4) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=-1$.

2. 求双曲线的标准方程,并作图:

   (1) 焦点在 x 轴上,焦距是 14,顶点间的距离等于 12;

   (2) 焦点在 y 轴上,焦距是 16, $e=\frac{4}{3}$;

   (3) 渐近线为 $y=\frac{3}{5}x$,焦点坐标为 $(2,0)$.

3. 等轴双曲线的一个焦点是 $F_1(-6,0)$,求它的标准方程和渐近线方程.

习　题　六

1. 根据下列条件,求双曲线的标准方程:

   (1) 焦点的坐标是 $(-6,0)$、$(6,0)$,并且经过点 $A(-5,2)$;

   (2) 实半轴等于 $2\sqrt{5}$,并经过点 $(5,-2)$.

2. 已知双曲线的方程是:

   (1) $16x^2-9y^2=144$;　　(2) $16x^2-9y^2=-144$,

   求它的焦点坐标、离心率、渐近线方程.

3. 求与椭圆 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 有公共焦点,且离心率 $e=\frac{5}{4}$ 的双曲线方程.

4. 求经过点 $A(3,-1)$，并且对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线方程.

5. 从相距 1400 米的 A、B 两哨所听到炮弹爆炸声的时间相差 3 秒，已知声速是 340 米/秒. 炮弹爆炸点在怎样的曲线上？

6. 求下列直线和双曲线的交点坐标：

(1) 直线 $2x-y-10=0$, 双曲线 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$;

(2) 直线 $4x-3y-16=0$, 双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

7. 求与定点 $A(5,0)$ 和定直线 $l: x=\frac{16}{5}$ 的距离比是 5:4 的点的轨迹方程.

8. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ 与 $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$ 的渐近线有什么关系？

9. 经过双曲线 $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ 的一个焦点，作 x 轴的垂线，求垂线与双曲线的交点到两焦点的距离.

10. 证明：从双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离等于半虚轴长.

四 抛物线

7.7 抛物线及其标准方程

我们知道，在平面内到一个定点的距离和到一条定直线的距离的比是常数 e 的点的轨迹，当 $e<1$，是椭圆；当 $e>1$ 时，是双曲线. 那么，当 $e=1$ 时，它又是什么曲线呢？

平面内到一个定点和一条定直线的距离相等的点的轨迹

叫做**抛物线**．定点叫做抛物线的**焦点**．定直线叫做抛物线的**准线**．

取经过焦点F且垂直于准线l的直线为x轴，x轴与l相交于点K，以线段KF的垂直平分线为y轴(图7-19)．设$|KF|=p(p>0)$，那么焦点F的坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线$l$的方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

设抛物线上的点$M(x,y)$到l的距离为d．抛物线也就是集合

$$P=\{M:|MF|=d\}.$$

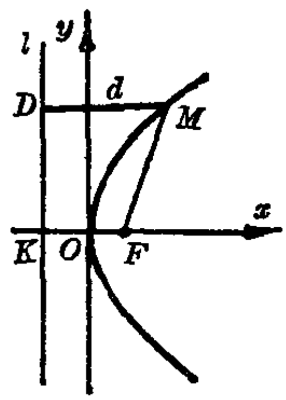


图 7-19

根据两点间距离公式，

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\quad d=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

所以

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方，并化简得

$$\boxed{y^2=2px.\quad (p>0)}\qquad(1)$$

方程(1)叫做**抛物线的标准方程**．它表示的抛物线的焦点在x轴的正半轴上，坐标是$\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程是$x=-\frac{p}{2}$.

例如，抛物线的方程是$y^2=6x$，这时$p=3$，它的焦点是$F\left(\frac{3}{2},0\right)$，准线方程是$x=-\frac{3}{2}$.

如果抛物线的焦点换成$\left(-\frac{p}{2},0\right)$，准线换成$y=\frac{p}{2}$，那么

抛物线的方程为 $y^2=-2px$（图 7-20）．同样，如果抛物线的

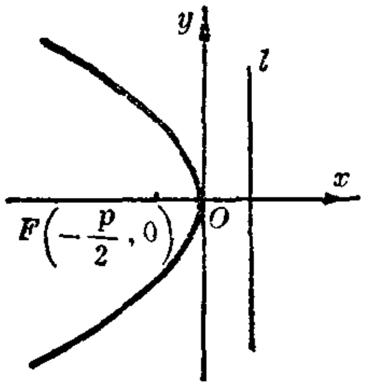


图 7-20

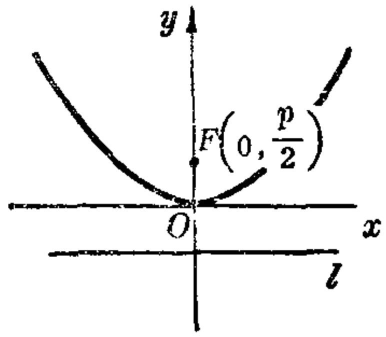


图 7-21

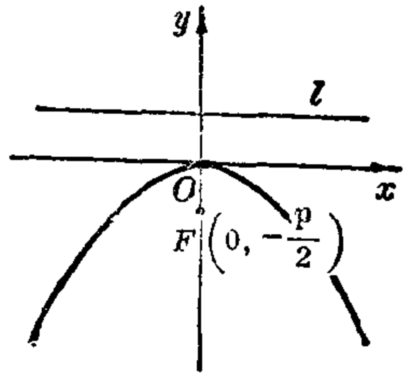


图 7-22

焦点在 y 轴上，其坐标是$\left(0,\frac{p}{2}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{p}{2}$，那么方程为 $x^2=2py$（图 7-21）．如果焦点坐标是$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$，准线方程为$y=\frac{p}{2}$，那么方程为 $x^2=-2py$（图 7-22）．

练 习

1. 根据下列条件，写出抛物线的标准方程：

   (1) 焦点是 $F(3,0)$；

   (2) 准线方程是 $x=-\frac{1}{4}$；

   (3) 焦点到准线的距离是 2．

2. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

   (1) $y^2=20x$；　　(2) $x^2=\frac{1}{2}y$；

   (3) $2y^2+5x=0$；　　(4) $x^2+8y=0$．

7.8 抛物线的性质

我们根据抛物线的标准方程

$$y^2=2px \qquad (p>0) \tag{1}$$

来研究它的性质.

1. 范围

在方程(1)中,因为 $y^2\geqslant 0$, $p>0$,所以 $x\geqslant 0$, 这表明这个抛物线在 y 轴的右侧. 同时当 x 的值从零起逐渐增大时, $|y|$ 也增大,这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸.

2. 对称性

以 $-y$ 代 y, 方程(1)不变, 所以这个抛物线关于 x 轴对称,我们把抛物线的对称轴叫做抛物线的轴.

3. 顶点

抛物线和它的轴的交点叫做**抛物线的顶点**. 在方程(1)中,当 $x=0$ 时, $y=0$,因此抛物线(1)的顶点就是坐标原点.

4. 离心率

抛物线上的点M到焦点和准线的距离的比, 叫做抛物线的**离心率**,用 e 表示. 按抛物线的定义, $e=1$.

例 1 已知抛物线的顶点在坐标原点, 关于 x 轴对称,并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$. 求它的标准方程.

解: 因为抛物线关于 x 轴对称, 顶点在坐标原点并且经过点$M(2, -2\sqrt{2})$,所以可设它的标准方程为

$$y^2=2px.$$

因为点M在抛物线上,所以

$$(-2\sqrt{2})^2=2p\times 2,$$

即

$$p=2.$$

因此,所求方程是 $y^2=4x$.

例 2 拱宽为 $2a$、拱高为 h 的抛物线拱的画法如下,证明

所画的拱是抛物线形.

画法:(1) 作矩形 $ABCD$, 使 $AB=2a$, $BC=h$(图 7-23).

(2) 取 AB 的中点 H, 把线段 AH、AD 各 n 等分. 设 AH 上的分点顺次为 A_1、A_2、…, AD 上的分点顺次为 B_1、B_2….

(3) 过 H、A_1、A_2、…作直线 HO、A_1A_1'、A_2A_2'、…平行于 AD, 交 DC 于 A_1'、A_2'…、0. 连结 OB_1、OB_2、…分别交 A_1A_1'、A_2A_2'、…于 P_1、P_2、…、P_k、…. 把 A、P_1、P_2、…、P_k、…0 各点连成光滑曲线, 就得到拱形的一半.

(4) 用同样方法可画出拱形的另一半.

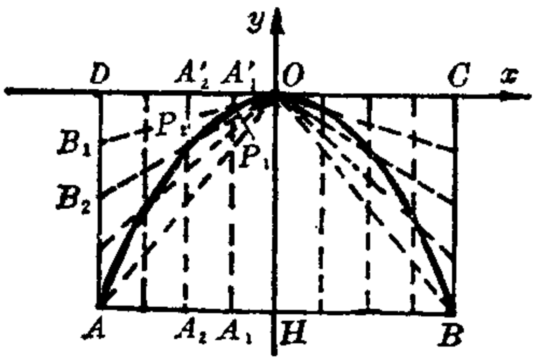


图 7-23

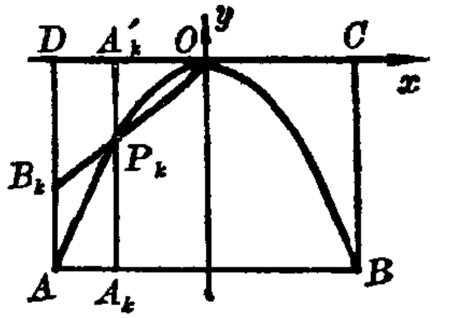


图 7-24

证明: 以 O 为原点, 直线 DC 为 x 轴建立坐标系(图 7-24).

设 $P_k(x, y)$ 是所作的点. 由画法可知,

$$x=-\frac{a}{n}k, \quad y=-|A_k'P_k|.$$

$\because$ $\triangle OA_k'P_k \backsim \triangle ODB_k$,

$\therefore$ $\dfrac{|A_k'P_k|}{|DB_k|}=\dfrac{|OA_k'|}{|DO|}$,

$$|A_k'P_k|=\frac{|DB_k|\cdot|OA_k'|}{|DO|}=\frac{\frac{h}{n}k\cdot\frac{a}{n}k}{a}=\frac{hk^2}{n^2}.$$

即 $$y=-\frac{hk^2}{n^2}.$$

从表示 x、y 的等式中消去 k、n，得

$$x^2=-\frac{a^2}{h}y.$$

它表明点 P_k 的坐标 x、y 满足抛物线方程，所以所画的拱是一段抛物线.

例 3 探照灯的反射镜的纵截面是抛物线的一部分. 灯口直径是 60cm，灯深 40cm. 求抛物线的方程和焦点的位置.

解： 在纵截面内，以反射镜的顶点(即抛物线的顶点)为坐标原点，过顶点垂直于灯口直径的直线为 x 轴，建立直角坐标系(图 7-25).

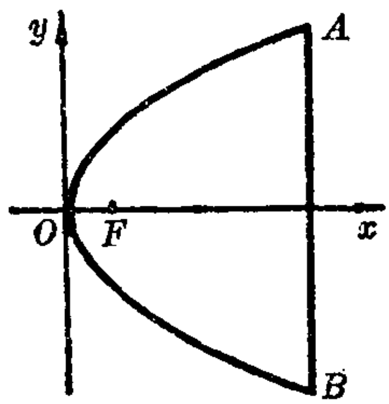


图 7-25

设抛物线的标准方程是 $y^2=2px$. 以点 A 的坐标(40, 30)代入方程，得

$$30^2=2p\times 40,$$

即 $$p=\frac{45}{4}.$$

所以抛物线的方程是 $y^2=\frac{45}{2}x$，焦点坐标是$\left(\frac{45}{8},0\right)$.

练 习

1. 求适合下列条件的抛物线方程：

(1) 顶点在原点，关于 x 轴对称，并且经过 $M(5,-4)$；

(2) 顶点在原点，焦点是 $F(0, 5)$；

(3) 顶点在原点，准线是 $x=4$；

(4) 焦点是 $F(0, -8)$，准线是 $y=8$.

2. 一条隧道的顶部是抛物拱形，拱高是 1.1 米，跨度是 2.2 米，求拱形抛物线方程.

3. 根据抛物线的定义，利用直尺和圆规画抛物线 $y^2=4x$ 的图形.

7.9 抛物线的切线和法线

抛物线的切线和法线的性质，在光学上有重要的应用. 现在，我们来学习抛物线的切线和法线.

设直线 l' 与抛物线相交于 P、Q 两点(图 7-26). 当直线 l' 绕点 P 旋转时，点 Q 沿着抛物线逐渐靠近点 P，当直线 l' 转到直线 l 的位置时，点 Q 与点 P 重合，直线 l 叫做抛物线在 P 点的**切线**.

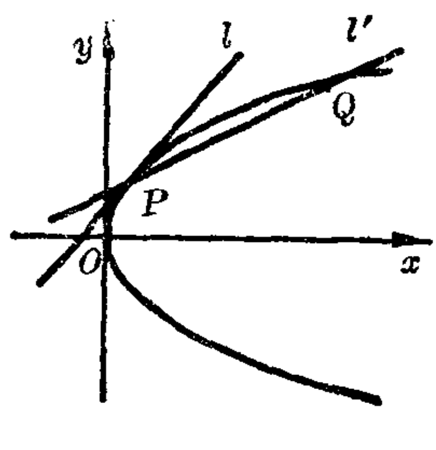


图 7-26

下面我们来求抛物线的切线方程.

设抛物线方程为

$$y^2=2px.$$

$P(x_0, y_0)$ $(x_0\neq 0,)$ 是抛物线上的点. 我们来确定斜率 k，使过 P 的直线 PQ，

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (k\neq 0)$$

成为抛物线在 P 点的切线.

直线 PQ 和抛物线的交点坐标是方程组

$$\begin{cases} y^2=2px, \\ y-y_0=k(x-x_0) \end{cases}$$

的解．要使直线 PQ 成为抛物线的切线，点 Q 必须与 P 重合，因此这个方程组有两个相同的实数解．

由第一个方程，得

$$x=\frac{y^2}{2p}.$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线上，所以

$$x_0=\frac{y_0^2}{2p}.$$

将上两式代入第二个方程，得

$$y-y_0=k\left(\frac{y^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p}\right),$$

即

$$ky^2-2py+(2py_0-ky_0^2)=0.$$

这是一个一元二次方程，它有相等的实数解的充要条件是判别式等于零，即

$$4p^2-4k(2py_0-ky_0^2)=0,$$

$$(p-ky_0)^2=0.$$

由此得

$$k=\frac{p}{y_0}.$$

于是得到切线的方程

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0).$$

由于 $y_0^2=2px_0$，上式可化简为

$$\boxed{y_0y=p(x+x_0).} \qquad (1)$$

这就是抛物线 $y^2=2px$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程.

过切点与切线垂直的直线叫做抛物线在这点的法线. 根据两直线垂直, 它们的斜率互为负倒数, 所以, 抛物线 $y^2=2px$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的法线的斜率为

$$k_1=-\frac{y_0}{p}.$$

由此可求出抛物线在点 $P(x_0, y_0)$ 的法线方程

$$\boxed{y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0).} \qquad (2)$$

实际上, 公式(1)、(2)当 P 为原点时也适用. 这时抛物线的切线、法线的方程分别是 $x=0$, $y=0$, 即 y 轴和 x 轴.

例 1 求抛物线 $y^2=8x$ 在点 $P(2, 4)$ 的切线方程和法线方程.

解: 因为 $p=4$, $x_0=2$, $y_0=4$, 代入(1)式, 得切线方程

$$4y=4(x+2),$$

即 $$x-y+2=0.$$

因为切线的斜率是 1, 所以法线的斜率是 -1, 所求法线方程是

$$y-4=-1(x-2),$$

即 $$x+y-6=0.$$

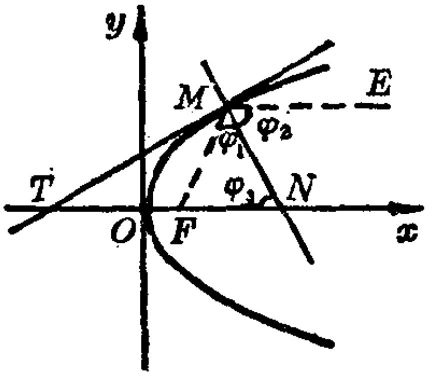


图 7-27

例 2 设 F 是抛物线的焦点, M 是抛物线上任一点(图 7-27), MT 是抛物线在 M 点的切线, MN 是法线, ME 是平行于抛物线的轴的直线, 那么法线 MN 必平分 $\angle FME$, 即 $\varphi_1=\varphi_2$.

证明：取坐标系如图 7-27. 这时，抛物线方程为

$$y^2=2px.$$

因为 ME 平行于 x 轴(抛物线的轴)，所以 $\varphi_2=\varphi_3$. 要证明 $\varphi_1=\varphi_2$，只要证明 $\varphi_1=\varphi_3$，也就是只要证明 $\triangle FMN$ 的两边 FM 和 FN 相等.

设点 M 的坐标为 (x_0, y_0)，则法线 MN 的方程是

$$y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0).$$

令 $y=0$，便得到法线与 x 轴的交点 N 的坐标是 $(x_0+p, 0)$，所以

$$|FN|=|ON|-|OF|=x_0+p-\frac{p}{2}=x_0+\frac{p}{2}.$$

又由抛物线的定义可知，$|MF|$ 等于 M 到准线的距离，

因此，
$$|FM|=x_0+\frac{p}{2}.$$

所以，
$$|FN|=|FM|.$$

由此得到
$$\varphi_1=\varphi_3=\varphi_2.$$

如果将抛物线绕它的对称轴旋转成旋转曲面(旋转抛物面)，那么从例 2 我们看到，与对称轴平行的光线投射到曲面

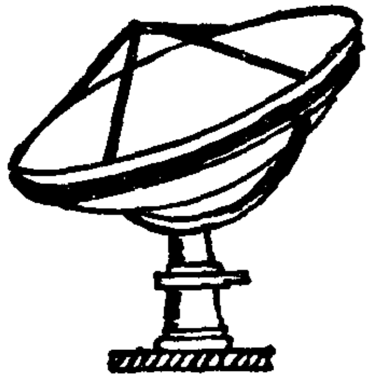


图 7-28

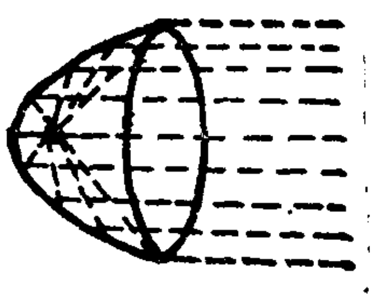


图 7-29

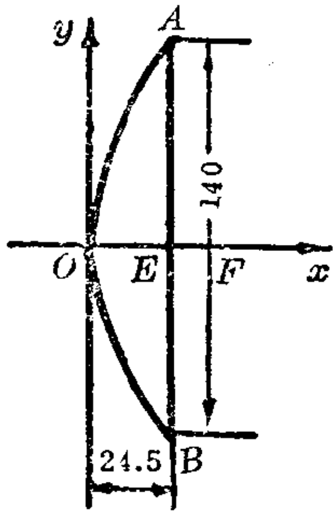
上，经曲面反射后便都过焦点．利用抛物线的这个光学性质可以制作太阳灶(图 7-28)．反过来，放在焦点处的光源发出的光线投射到曲面上，经曲面反射后便成为平行于轴的光线．利用这个光学性质就可以制作探照灯和汽车前灯(图 7-29)等．

练　习

1. 求抛物线 $y^2=3x$ 在点 $P\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$的切线方程和法线方程．

2. 求在抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 与直线 $x+y=5$ 的交点上的切线方程和法线方程．

3. 太阳灶口径 $AB=140$ 厘米，深度 $OE=24.5$ 厘米，问热能接收器应放在 x 轴上离顶点 O 多远的位置上（取坐标系如右图）．



(第 3 题)

习　题　七

1. 已知抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 上一点 M 到焦点的距离是 $a\left(a>\frac{p}{2}\right)$，点 M 到准线的距离是多少？点 M 的横坐标是多少？

2. 取经过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 y 轴，推导抛物线的标准方程．

3. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $x^2=\frac{1}{2}y$;

(2) $4x^2+3y=0$;

(3) $2y^2=-5x$;

(4) $y^2-6x=0$.

4. 根据下列条件，求抛物线的方程，并用描点法作出图形。

(1) 顶点在原点，对称轴是 x 轴，并且从顶点到焦点的距离等于 6；

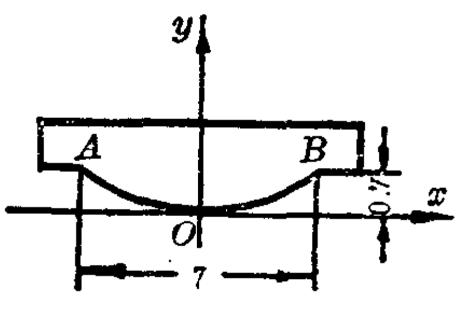
(2) 顶点在原点，对称轴是 y 轴，并且经过点 $A(-6, -3)$。

5. 经过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 F，作一条直线垂直于它的对称轴，和抛物线相交于 P_1、P_2 两点，求 P_1P_2 的长。

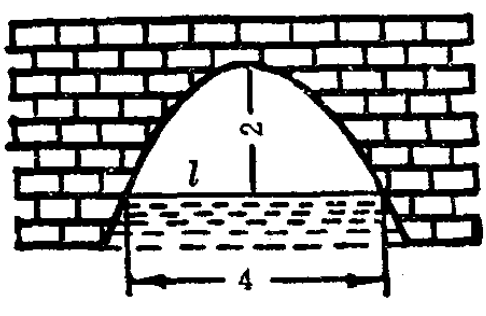
6. 在抛物线 $y^2=12x$ 上，求和焦点的距离等于 9 的点的坐标。

7. 过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点的一条直线和抛物线相交，两个交点的纵坐标为 y_1、y_2。求证：$y_1y_2=-p^2$。

8. 吊车梁的鱼腹部分 AOB 是一段抛物线，宽为 7 米，高为 0.7 米，试求这条抛物线的方程。



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 图中是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶离水面 2 米，

水面宽 4 米．水下降 1 米后，水面宽多少？

10. 抛物线的顶点是双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的中心，而焦点是双曲线的左顶点，求抛物线的方程．

11. 已知两抛物线的顶点在原点，而焦点分别在点 $F(2,0)$ 和点 $F'(0,2)$．求它们的交点．

12. 点 M 到点 $F(4,0)$ 的距离比它到直线 $x+5=0$ 的距离小 1，求点 M 的轨迹方程．并画出图形．

13. 防空探照灯的反射镜与轴的截面的交线是一条抛物线，已知灯口直径是 2 米，深度是 0.8 米，光源应放在什么位置？

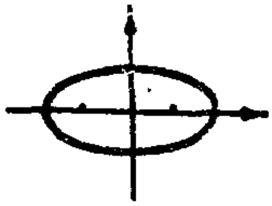
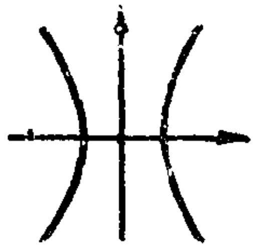
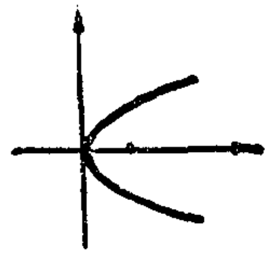
小　结

一、本章在第六章直线方程的基础上，根据曲线的条件，求出了几种二次曲线的方程，并通过方程讨论了圆、椭圆、双曲线和抛物线的性质及应用．

二、根据圆的定义，求出了圆的标准方程，又由标准方程推出了圆的一般方程．圆的标准方程的优点，在于它表明了圆心和半径，而圆的一般方程则突出了方程形式上的特点，它没有 xy 项，并且 x^2、y^2 项的系数相等且不为零．但要注意，这只是圆的一般方程的必要条件，不是充分条件．

三、由椭圆、双曲线、抛物线的几何条件求其标准方程，并通过分析标准方程研究这三种曲线的几何性质．

三种曲线的标准方程（各取其中一种）和图形、性质如下页表：

	椭　圆	双　曲　线	抛　物　线
几何条件	到两个定点的距离和等于常数	到两个定点的距离差的绝对值等于常数	到一个定点和一条定直线的距离相等
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$	$y^2=2px$ $(p>0)$
图　形			
顶点坐标	$(\pm a, 0), (0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(0, 0)$
对称轴	x 轴，长轴长 $2a$ y 轴，短轴长 $2b$	x 轴，实轴长 $2a$ y 轴，虚轴长 $2b$	x 轴
焦点坐标	$(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
离心率	$0<e<1$	$e>1$	$e=1$
准　线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$
渐近线	无	$y=\pm\frac{b}{a}x$	无

四、椭圆、双曲线、抛物线的统一性：

(1) 从方程的形式看：在直角坐标系中，它们的方程都是二元二次方程．所以把它们统称为二次曲线．

(2) 从点的集合或轨迹的观点来看：它们都是到定点与定直线距离的比是常数 e 的点的集合或轨迹，由于离心率 e

的不同，而分成三种不同曲线。

(3) 三种曲线又可看作平面与圆锥面相截（平面不通过圆锥面的顶点）而得到的截线，如图 7-30. 因此，它们又统称圆锥曲线。

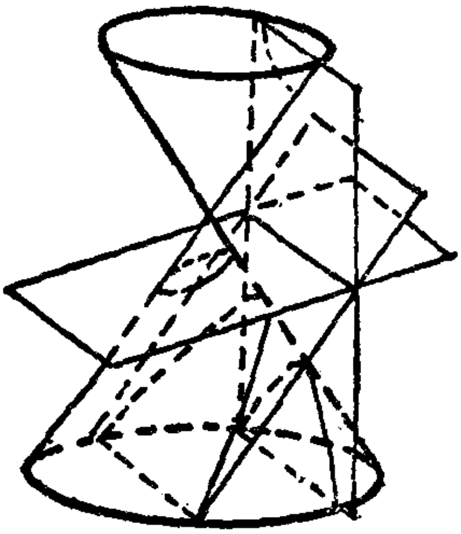


图 7-30

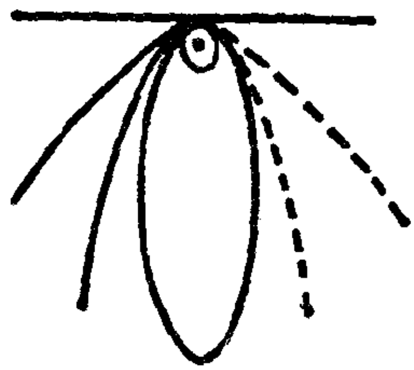


图 7-31

(4) 从天体运行的轨道看：一些天体运动轨道是这三种曲线，例如，人造卫星、行星等由于运行速度不同，它的轨道可以是圆、椭圆、双曲线或抛物线，如图 7-31.

复习题七

1. k 分别取何值时，直线 $y=kx+5$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 有下列关系：(1) 相交；(2) 相切；(3) 不相交？

2. 试求经过点 $P(-3,4)$，且与圆 $x^2+y^2+3x-4y-1=0$ 同心的圆的方程。

3. 已知圆经过点 $A(-2, 4)$ 和 $B(-1,3)$，且其圆心在直线 $2x-3y+2=0$ 上，试求这个圆的方程。

4. 三角形的三边的方程是 $x-6=0$, $x+2y=0$ 和 $x-2y-8$

$=0$，求三角形外接圆的方程。

5. 试证：到一定点距离的平方与到一定直线的距离成正比例的点的轨迹是一个圆。

6. 求二圆 $x^2+y^2-10x-10y=0$ 和 $x^2+y^2+6x+2y-40=0$ 的公共弦的长。

7. 根据下列条件求曲线的离心率：

   (1) 椭圆的一个顶点与两焦点的连线互相垂直；

   (2) 椭圆的一个顶点与两焦点组成等边三角形；

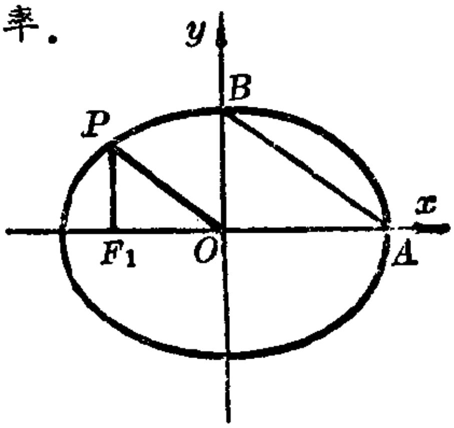
   (3) 双曲线渐近线的夹角是 60°；

   (4) 双曲线的一个顶点与虚轴的两端组成顶角为 120° 的等腰三角形。

8. 椭圆的一个焦点把长轴分成两段，分别等于 7 和 1，试求椭圆的标准方程。

9. 地球绕太阳运行的轨道是一个椭圆，太阳在它的一个焦点上。如果地球与太阳的最短距离与最远距离之比为 29:30，试求地球运行轨道的离心率。

10. 如图，从椭圆上一点 P 向 x 轴作垂线，恰好通过椭圆的一个焦点，这时椭圆的长轴的端点 A 和短轴的端点 B 的连线平行于 OP. 求椭圆的离心率。



(第 10 题)

11. 已知中心在原点的双曲线的一个焦点 $F_1(-4, 0)$，一条渐近线的方程是 $3x-2y=0$. 求双曲线的方程。

12. 已知双曲线的离心率为 2，求它的两条渐近线间的夹角。

13. 一个圆的圆心在双曲线 $x^2-3y^2=12$ 的右焦点上，并且圆过原点，求这个圆和双曲线的交点的坐标.

14. 已知双曲线$\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=1$上一点的横坐标等于15，试求该点到两个焦点的距离.

15. 已知抛物线的顶点在原点，焦点在 x 轴上，并且经过点 $Q\left(\frac{3}{2}, -4\right)$，求它的方程.

16. (1) 从抛物线 $y^2=2px$ 上各点，作 x 轴的垂线段，求线段中点的轨迹；

(2) 求抛物线 $y^2=2px$ 上各点与焦点连线中点的轨迹.

17. 设抛物线的顶点为 O，经过焦点垂直于轴的直线和抛物线交于两点 B、C，经过抛物线上一点 P 垂直于轴的直线和轴交于点 Q. 求证：线段 PQ 是 BC 和 OQ 的比例中项.

18. 求抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $y=2x+4$ 的距离最短的点的坐标，并求出这个距离.

*第八章　坐 标 变 换

一　坐标轴的平移

8.1　平移公式

点的坐标和曲线的方程是对一定的坐标系来说的．同一个点，在不同的坐标系中有不同的坐标．如图 8-1 的点 P，对于坐标系 xOy 来说，它的坐标是(2, 3)；对于坐标系 $x'O'y'$ (O' 和 P 重合，$O'x' \parallel Ox$，$O'y' \parallel Oy$)来说，它的坐标就是(0, 0)．同样，同一条曲线，在不同的坐标系中也有不同的方程．如图 8-2，对于坐标系 xOy 来说，以点 $C(3, 2)$ 为圆心、以 5 为半径的圆，它的方程是 $(x-3)^2+(y-2)^2=5^2$；对于坐标系 $x'O'y'$ (O' 和 C 重合，$O'x' \parallel Ox$，$O'y' \parallel Oy$)来说，这时 C 点的坐标变为(0, 0)，圆的方程变为 $x'^2+y'^2=5^2$．

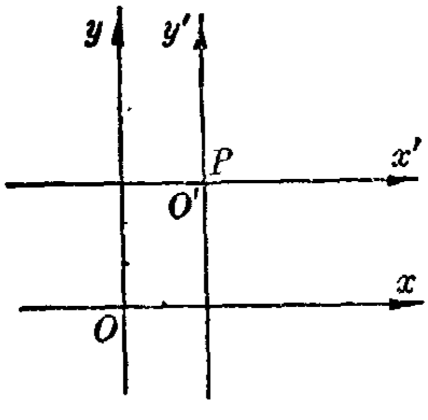


图　8-1

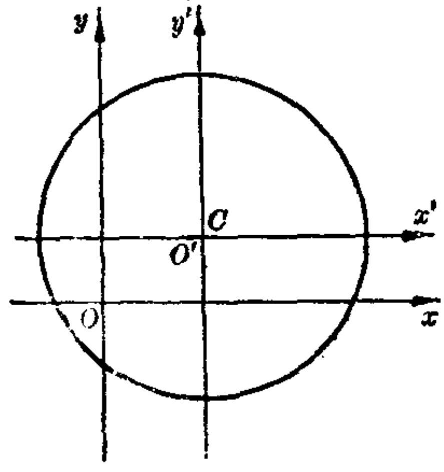


图　8-2

这就是说，对于同一个点或同一条曲线，由于选取的坐标系不同，点的坐标或曲线的方程也不同．从上面的例子可以看出，把一个坐标系变换为另一个适当的坐标系，可以化简曲线的方程．

当坐标轴的方向和长度单位都不改变，只改变原点的位置时，这种坐标系的变换叫做**坐标轴的平移**，简称**平移**．

如图 8-3，xOy 是旧坐标系，$x'O'y'$ 是平移后的新坐标系．新坐标系的原点 O' 在旧坐标系中的坐标是(h, k)．设M是平面内任意一点，它在旧坐标系中的坐标是(x, y)，在新坐标系中的坐标是(x', y')，那么新旧坐标之间有下列关系：

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + h, \\ y &= y' + k. \end{aligned}} \tag{1}$$

或

$$\begin{aligned} x' &= x - h, \\ y' &= y - k. \end{aligned} \tag{2}$$

公式(1)、(2)叫做**平移公式**．利用这个公式，我们可以从点的旧坐标求得它的新坐标；反之，也可以从点的新坐标求得它的旧坐标．

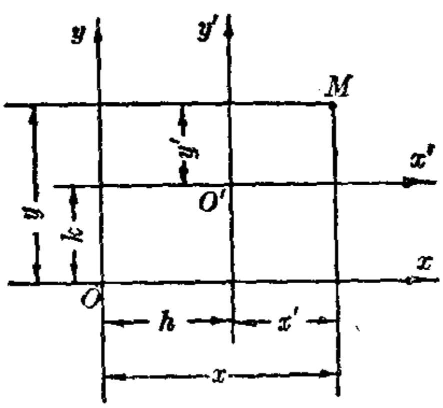


图 8-3

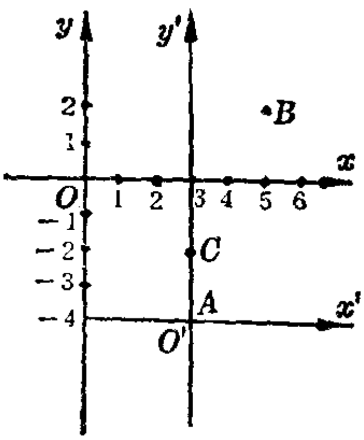


图 8-4

例 1 平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,-4)$（图 8-4），求下列各点的新坐标：$O(0,0)$，$A(3,-4)$，$B(5,2)$，$C(3,-2)$。

解： 由公式(2)得出新旧坐标的关系式：

$$x'=x-3,$$
$$y'=y+4.$$

依次将各点的旧坐标代入上式，得到它们的新坐标：

$$O(-3,4),\quad A(0,0),\quad B(2,6),\quad C(0,2).$$

对于坐标系 xOy 来说，图 8-2 的 $\odot C$ 的方程是

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2, \tag{3}$$

对于 $x'O'y'$ 坐标系来说，它的方程是

$$x'^2+y'^2=5^2. \tag{4}$$

现在我们来研究，怎样从方程(3)得出方程(4)。

因为 $\odot C$ 关于旧坐标系的方程(3)是 $\odot C$ 上所有各点的旧坐标所要适合的关系，而旧坐标 x、y 和新坐标 x'、y' 之间有关系：

$$x=x'+3,$$
$$y=y'+2.$$

所以把上式代入(3)，就得到 $\odot C$ 上所有各点的新坐标 x'、y' 所要适合的关系式：

$$(x'+3-3)^2+(y'+2-2)^2=5^2,$$

即

$$x'^2+y'^2=5^2.$$

这就是 $\odot C$ 关于新坐标系的方程(4)。

一般地说，一条曲线关于旧坐标系的方程，是这条曲线上所有各点的旧坐标 x、y 所要适合的关系，如果把方程中的 x

代以 $x'+h$, y 代以 $y'+k$, 就得到曲线上所有各点的新坐标 x'、y' 所要适合的关系，这就是这条曲线关于新坐标系的方程。

例2 平移坐标轴，把原点移到 $O'(2,-1)$，求下列曲线关于新坐标系的方程，并且画出新旧坐标轴和曲线。

(1) $x=2$;

(2) $y=-1$;

(3) $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$.

解：设曲线上点的新坐标为 (x',y')，那么

$$x=x'+2,\qquad y=y'-1.$$

代入原方程，就得到新方程：

(1) $x'=0$;

(2) $y'=0$;

(3) $x'^2+y'^2=3^2$.

新旧坐标轴和曲线如图 8-5 所示。

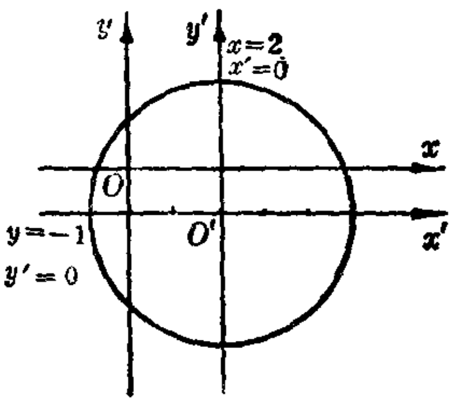


图 8-5

练 习

1. 把坐标轴平移后，原点、坐标轴的方向、长度单位、图形、点的坐标和曲线的方程中，哪些发生了变化？哪些没有发生变化？

2. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(-4,2)$，求下列各点的新坐标，并画出新旧坐标轴和各点：

   $A(-6,3)$; $B(2,3)$; $C(-4,5)$; $D(0,-4)$; $O(0,0)$.

3. 经过平移，把原点移到 $O'(1,-2)$，A、B、C、D 的新坐标

分别是(−1,1)、(0,−2)、(3,2)、(2,0)，求它们的旧坐标，并画出新旧坐标轴和各点.

8.2 利用平移化简缺 xy 项的二元二次方程

在上一节，我们看到经过适当地平移可以化简曲线的方程. 现在，我们研究如何选择新坐标系来化简方程. 先看下面的例子.

例 1 用平移化简方程 $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$，并画出新旧坐标系和方程的曲线.

解: 把方程按 x、y 分别配方、化简得

$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1。\quad(1)$$

设(利用平移公式)

$$x'=x+1,$$

$$y'=y-2.$$

代入方程(1)，得

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

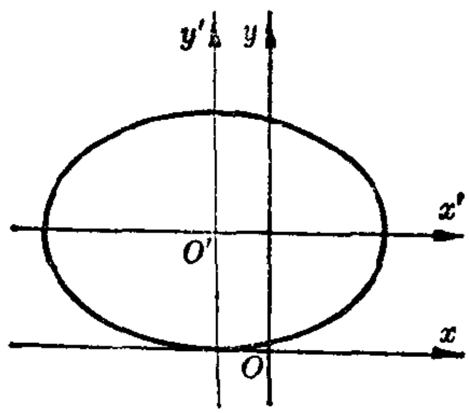


图 8-6

这是一个椭圆的方程，它的中心在新原点 O'，对于旧坐标系来说，坐标是(−1,2)，它的长半轴、短半轴分别是 3 和 2 (图 8-6).

例 2 用平移化简方程 $y=\frac{x^2}{4}-x-2$，画出它的图形，并求它的顶点和焦点在旧坐标系中的坐标，以及准线在旧坐标系中的方程.

解: 原方程就是

$$4y=x^2-4x-8.$$

配方，得

$$(x-2)^2=4(y+3). \qquad (1)$$

设 $\qquad x'=x-2,$

$$y'=y+3.$$

代入方程(1)，得

$$x'^2=4y'.$$

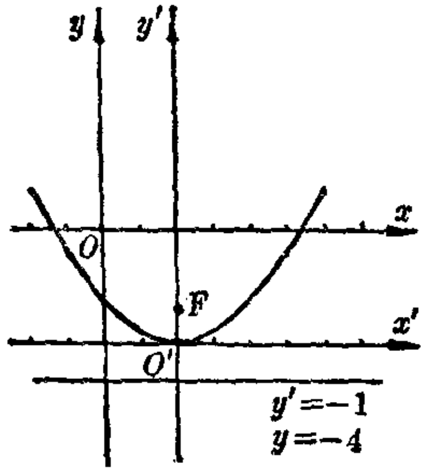


图 8-7

这是一条抛物线的方程，在新坐标系中，它的顶点坐标是(0, 0)，焦点坐标是(0, 1)，准线方程是 $y'=-1$. 利用平移公式，得到在旧坐标系中，顶点和焦点的坐标分别是 (2, −3) 和(2, −2)，准线方程是 $y=-4$(图 8-7).

上面例题说明，对于缺 xy 项的二元二次方程

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \text{(}A\text{、}C\text{ 不同时为零)}$$

经过平移，可以使新方程没有一次项(或没有一个一次项和常数项)，从而化简方程.

练　习

1. 经过怎样的平移变换，可以把方程 $x^2+y^2-6x+12y-4=0$ 化为没有一次项的新方程?
2. 平移坐标轴，把原点移到 $O'(2, 1)$，求 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 在新坐标系中的方程，并画图.

习　题　八

1. (1) 平移坐标轴，把点 $A(1, 0)$ 变为 $A(4, 3)$，应把原点移

到何处?

(2) 经过坐标轴平移,把原点移到 $O'(3, -2)$ 后, A、B、C、D 各点的新坐标分别是 $(0,2)$、$(-3,0)$、$(-1,3)$、$(1,1)$,求它们的旧坐标,并画出新旧坐标轴和各点.

2. 两直角坐标系有相同方向的轴,设旧坐标系的原点 O 关于新坐标系的坐标是 $(7,-5)$,求新坐标系的原点 O' 关于旧坐标系的坐标.

3. 平移坐标轴化简方程:

(1) $x^2+y^2+4x+8y-5=0$;

(2) $x^2+2y^2-4x+8y-5=0$;

(3) $4x^2-9y^2+16x-54y-29=0$;

(4) $y^2-4y-4x+16=0$.

4. 平移坐标轴,把原点移到 $O'(-3,2)$,求 $x^2+6x-y+11=0$ 在新坐标系中的方程.

5. 求曲线 $x^2-2y^2-6x+4y+3=0$ 的焦点坐标和对称轴方程.

二　坐标轴的旋转

8.3　旋转公式

前面我们学过坐标轴的平移.现在来讨论坐标轴旋转时同一个点的新旧坐标间的关系.

如果原点的位置和坐标轴上的长度单位不变,只是两条坐标轴按同一方向绕原点转动同一角度,这种坐标系的变换叫做**坐标轴的旋转**,简称**旋转**.

设坐标轴旋转角为 θ. 在平面内任取一点 M, 它在坐标系 xOy 和 $x'Oy'$ 中的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y') (图 8-8).

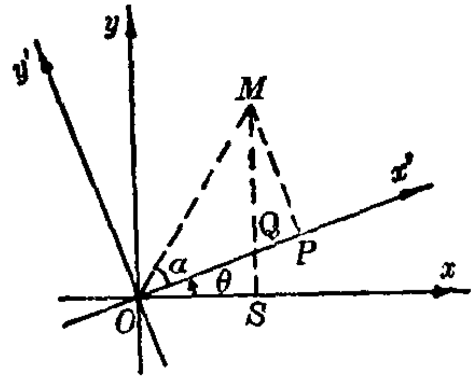


图 8-8

作 MS、MP 分别垂直于 x 轴、x' 轴, S、P 为垂足. 连结 OM, 设 $\angle POM=\alpha$. 那么

$$x'=|OM|\cos\alpha,$$
$$y'=|OM|\sin\alpha.$$

所以

$$x=|OM|\cos(\theta+\alpha)=|OM|(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)$$
$$=x'\cos\theta-y'\sin\theta,$$
$$y=|OM|\sin(\theta+\alpha)=|OM|(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

也就是

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y&=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{aligned}} \tag{1}$$

由(1)解出 x'、y', 得

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ y'&=-x\sin\theta+y\cos\theta.\end{aligned} \tag{2}$$

(1) 是用新坐标表示旧坐标的旋转变换公式, (2) 是用旧坐标表示新坐标的旋转变换公式, 统称为**旋转公式**.

例 1 把坐标轴旋转 $\frac{\pi}{6}$, 求点 $M(-1, \sqrt{3})$ 在新坐标系中的坐标.

解 把 $\theta=\frac{\pi}{6}$、$x=-1$、$y=\sqrt{3}$ 代入公式(2), 得

$$x' = -1 \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$y' = -(-1) \cdot \sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

点M在新坐标系中的坐标是$(0, 2)$.

例2 将坐标轴旋转$\frac{\pi}{4}$，求曲线 $xy=k(k\neq 0)$ 在新坐标系中的方程，并画图.

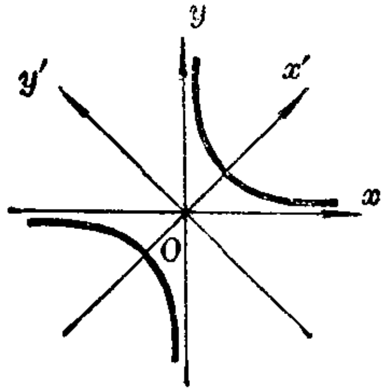
解: 把 $\theta=\frac{\pi}{4}$代入公式(1)，得

$$x = x' \cos\frac{\pi}{4} - y' \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

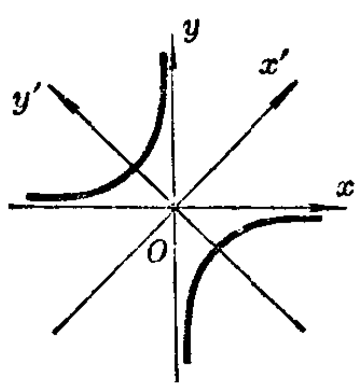
$$y = x' \sin\frac{\pi}{4} + y' \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

代入方程 $xy=k$，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = k,$$



$k>0$



$k<0$

图 8-9

即 $$x'^2-y'^2=2k.$$

这个方程的图形是等轴双曲线. 当 $k>0$ 时, 双曲线的焦点在 x' 轴上, 当 $k<0$ 时, 双曲线的焦点在 y' 轴上(图 8-9). 旧坐标轴是它的两条渐近线.

练　习

1. 设旋转角 $\theta=-\frac{\pi}{4}$, 求新坐标是 $A(-3,2)$、$B(1,0)$ 的两点在旧坐标系的坐标.
2. 设旋转角 $\theta=\frac{\pi}{6}$, 求旧坐标是 $C(2,-1)$、$D(0,1)$ 的两点在新坐标系的坐标.
3. 按所给的角 θ 旋转坐标轴, 变换下列各方程:

   (1) $x+y=0$, $\theta=\frac{\pi}{4}$;

   (2) $x-y=0$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$;

   (3) $x^2+y^2=9$, $\theta=\frac{\pi}{3}$;

   (4) $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2=8$, $\theta=-\frac{\pi}{3}$.

8.4 利用旋转化简二元二次方程

例 1 利用坐标轴的旋转化简方程 $25x^2+14xy+25y^2=288$, 使新方程中不含 $x'y'$ 项, 并画图.

解: 把旋转公式

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

代入所给方程,得

$$25(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2$$
$$+14(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$
$$+25(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2=288,$$

即 $$(25+14\sin\theta\cos\theta)x'^2+14(\cos^2\theta-\sin^2\theta)x'y'$$
$$+(25-14\sin\theta\cos\theta)y'^2$$
$$=288.\quad(*)$$

令 $x'y'$ 项的系数等于零,得

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=0.$$

解这个三角方程,取它的最小正数解 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 把 $\theta=\frac{\pi}{4}$代入方程(*),得

$$16x'^2+9y'^2=144,$$

即

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{16}=1.$$

方程的图形是椭圆(图 8-10).

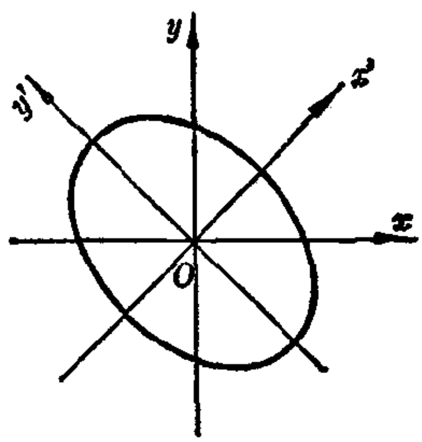


图 8-10

对于一般二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,\qquad(1)$$

其中 $B\neq0$($B=0$ 的情况前面已经研究过了),我们来研究利用坐标轴的旋转化简方程(1)的问题.

把坐标轴旋转 θ 角,这时

$$\begin{aligned}x&=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\y&=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{aligned}\qquad(2)$$

代入方程(1),得

$$
\begin{aligned}
&A(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2\\
&\quad+B(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)\\
&\quad+C(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2+D(x'\cos\theta-y'\sin\theta)\\
&\quad+E(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+F=0.
\end{aligned}
$$

合并同类项，方程化成下面形式

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0, \tag{3}$$

这里

$$
\left.\begin{aligned}
&A'=A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta,\\
&B'=-2A\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta,\\
&C'=A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta,\\
&D'=D\cos\theta+E\sin\theta,\\
&E'=-D\sin\theta+E\cos\theta,\\
&F'=F.
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

为使新方程中不含 $x'y'$ 项，只要适当选择 θ，使 $B'=0$ 即可．为此，令

$$-2A\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta=0.$$

由此得出

$$B\cos 2\theta=(A-C)\sin 2\theta,$$

即

$$\boxed{\operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}.} \tag{5}$$

由此得到利用旋转变换使新方程中不含 $x'y'$ 项的步骤如下:

1) 根据方程(1)中 A、B、C 的值，由(5)式求出旋转角 θ;

2) 将 θ 代入旋转公式(2);

3) 将所得的公式(2)代入原方程(1)，然后化简. 或者，在求出 θ 后，直接利用(4)式求出 A'、C'、D'、E'、F' 的值，代入(3)式便得到所求的新方程.

当 θ 角不是特殊角时，不必求出 θ，从公式(5)求出 $\operatorname{ctg}2\theta$ 的值，利用三角公式

$$\cos 2\theta=\frac{\operatorname{ctg}2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\theta}},$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

求出 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，然后代入旋转公式(2).

上面三个根号前都取正号. 这是因为要消去 $x'y'$ 项，只要取适合于(5)的 2θ 的最小正数值，就是使 $0<2\theta<\pi$，那么 $\cos 2\theta$ 必定和 $\operatorname{ctg}2\theta$ 同号；这时 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 必定都是正值；因此根号前都取正号.

例 2 利用坐标轴的旋转，化简方程 $2x^2+4xy+5y^2-22=0$，并画出它的图形.

解:

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{2-5}{4}=-\frac{3}{4},$$

$$\cos 2\theta=\frac{\operatorname{ctg} 2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\theta}}=\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=-\frac{3}{5},$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

因此旋转公式是

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y',$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'.$$

代入原方程, 得

$$2\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+5\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2-22=0.$$

化简后得

$$6x'^2+y'^2=22,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{11}{3}}+\frac{y'^2}{22}=1.$$

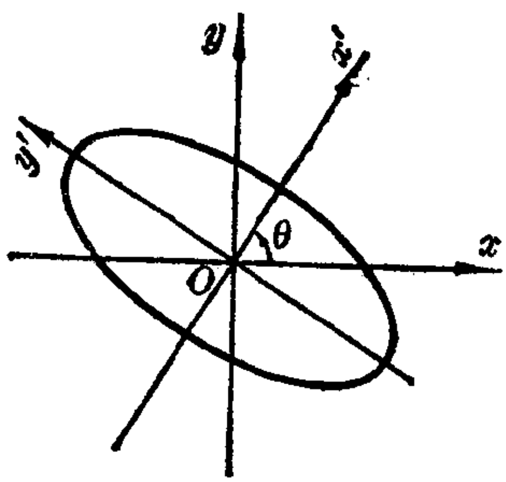


图 8-11

根据 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 得旋转角 $\theta\approx 63°26'$, 可画出新坐标

轴. 由所得方程, 可知它的图形是椭圆(图 8-11), 它的半长轴是$\sqrt{22}$, 半短轴是$\frac{\sqrt{11}}{3}$.

练　习

利用坐标轴的旋转, 化简方程 $x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0$, 使它不含 $x'y'$ 项.

8.5　化一般二元二次方程为标准式

一般二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 如何进行化简呢? 如果 $B=0$, 只要进行平移变换, 就可化为标准方程. 如果 $B\neq 0$, 那么可以先旋转坐标轴使新方程不含 xy 项, 再用坐标轴的平移把它化成标准方程.

例 1　化简方程 $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$, 并画出图形.

解:

$$\because\quad \operatorname{ctg}2\theta=\frac{1-1}{2}=0,$$

$$2\theta=\frac{\pi}{2},\qquad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y').$$

代入原方程, 化简后得

$$2x'^2+2\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'=0.$$

配方得

$$2\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\sqrt{2}\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

令

$$x''=x'+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y''=y'+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

代入上式，得

$$2x''^2=\sqrt{2}\,y'',$$

即

$$x''^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y''.$$

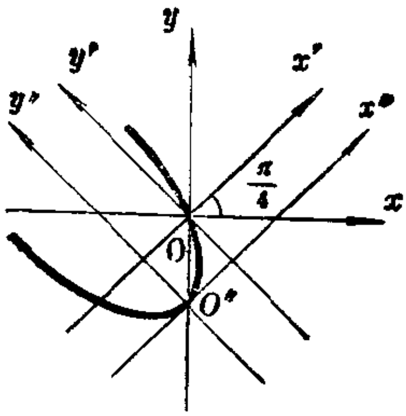


图 8-12

它的图形是抛物线(图 8-12)。

例 2 化简方程 $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$，并画出略图.

解:

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{0-3}{4}=-\frac{3}{4},$$

利用公式求得

$$\cos2\theta=-\frac{3}{5},\quad \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

因此旋转公式是

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y'),$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y').$$

代入原方程，化简得

$$4x'^2-y'^2+8\sqrt{5}x'-4\sqrt{5}y'-36=0.$$

配方，得

$$4(x'+\sqrt{5})^2-(y'+2\sqrt{5})^2=36.$$

令

$$x''=x'+\sqrt{5},$$
$$y''=y'+2\sqrt{5}.$$

代入上式，得

$$4x''^2-y''^2=36,$$

即

$$\frac{x''^2}{9}-\frac{y''^2}{36}=1.$$

它的图形是双曲线(图 8-13).

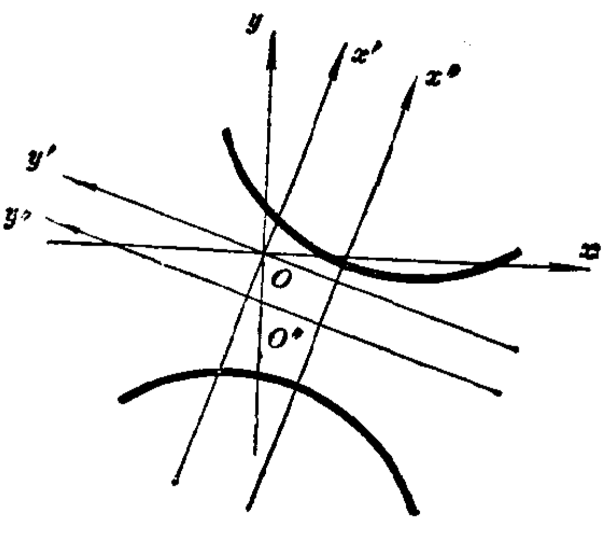


图 8-13

习 题 九

1. 把点 $P(4,3)$ 的坐标变成 $(3,4)$，坐标轴应旋转多大角度?

2. 将坐标轴旋转$\frac{\pi}{3}$后，点A的坐标变为$(1,2)$. 求点A在原坐标系的坐标.

3. 将坐标轴旋转$-90°$，求椭圆$x^2+\frac{y^2}{2}=1$在新坐标系中的方程.

4. 求证：坐标轴旋转任意角度时，方程$x^2+y^2=R^2$的形式不变.

5. 化简下列方程，并画出略图：

(1) $x^2+4xy+y^2=16$;

(2) $4x^2+8xy-2y^2-7=0$.

6. 化简方程

$$5x^2+12xy-22x-12y-19=0.$$

7. 化简方程

$$x^2+2xy+y^2+3x+y=0,$$

画出它的图形，并求出焦点和顶点在原坐标系中的坐标，以及准线在原坐标系中的方程.

8. 证明方程

$$2x^2+4xy+5y^2+4x+16y+14=0$$

表示一点.

9. 证明方程

$$x^2+2xy+y^2+2x+2y-3=0$$

表示两条平行直线.

小　结

一、坐标变换是解析几何的一种重要工具. 在本章里，

主要介绍了直角坐标系的两种常用变换：坐标轴的平移和坐标轴的旋转，给出了这两种变换的公式，并研究了利用平移和旋转化简二元二次方程的问题.

二、一般二次曲线的方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

通过坐标轴旋转可使新方程不含 $x'y'$ 项，再通过坐标轴平移就可以把一般方程化成标准形式. 但应注意，一般二次方程的图形除椭圆、双曲线、抛物线外，还有其他特殊情形，例如，两条相交直线、两条平行直线、两条重合直线、一点或没有图形等等.

三、在坐标变换下，点的坐标或曲线的方程一般都发生了变化，但点或曲线本身并没有变，这就是说，曲线的形状和大小与坐标系的选择无关. 因此，我们可以利用坐标变换化简方程，研究曲线.

复习题八

1. 说明坐标变换的作用. 坐标轴平移的特点是什么？旋转的特点是什么？

2. (1) 如果先平移坐标轴，把原点移到 $O'(h, k)$ 点，再把坐标轴绕着新原点旋转 θ 角，求证一点 M 的旧坐标 (x, y) 和新坐标 (x'', y'') 之间的关系是：

$$x=x''\cos\theta-y''\sin\theta+h,$$
$$y=x''\sin\theta+y''\cos\theta+k;$$

(2) 如果先把坐标轴绕着原点 O 旋转 θ 角，再平移坐标轴，把原点移到 $O'(h, k)$ 点（O' 点的坐标是指对旋转

后的坐标轴来说的)，求一点M的旧坐标(x, y)和新坐标(x'', y'')之间的关系。

3. 说明下列坐标变换表示怎样的变换：

(1) $\begin{cases} x = x' - 5, \\ y = y' + 4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y', \\ y = \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y'; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = y', \\ y = -x'; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x'' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'' + 2, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x'' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'' - 3. \end{cases}$

4. 证明在坐标变换下，两点间距离不变。

5. 已知椭圆的两轴平行于坐标轴，长、短半轴分别是a和b，中心在$C(x_0, y_0)$。写出它的方程。

6. 已知双曲线的中心在$A(x_0, y_0)$，焦距是$2c$，实轴长是$2a$，平行于y轴，求它的方程。

7. 已知抛物线的焦点在$F(a, b)$，焦点到准线的距离是p，轴的方向和y轴方向相同，求它的方程。

8. 化简下列方程并求焦点坐标及准线方程：

(1) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$;

(2) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y + 5 = 0$;

(3) $x^2 + xy + y^2 + x - y - 1 = 0$.

*第九章　极坐标和参数方程

一　极坐标

9.1　极坐标系

直角坐标系是最简单和最常用的一种坐标系．除了直角坐标系，还有其他的坐标系．例如，我们说，“向东南走 2 里就到了”，这就是利用距离和角来确定平面内一点的位置．下面所说的极坐标系，就是用长度和角来确定平面内点的位置的一种坐标系．

在平面内取一定点 O，从 O 引一条射线 Ox，并取定一个长度单位和角的正方向(通常取逆时针方向)，这样就可建立一个**极坐标系**(图 9-1)．点 O 叫做**极点**，射线 Ox 叫做**极轴**．

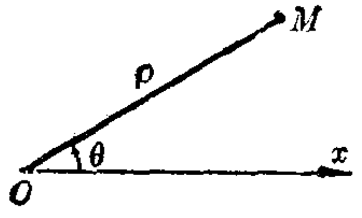


图　9-1

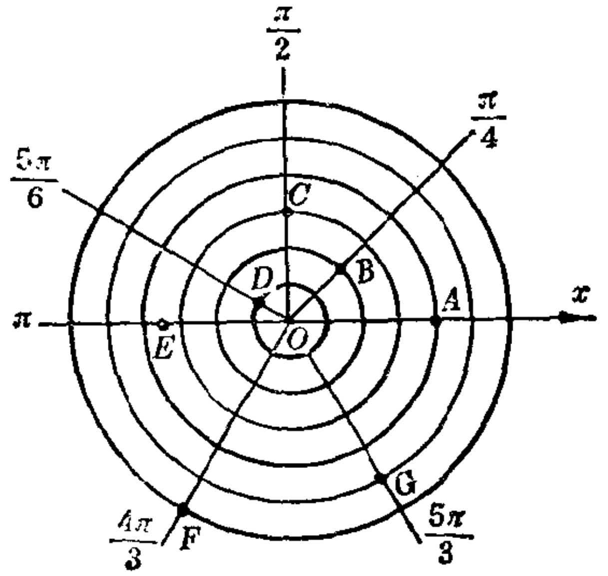


图　9-2

设M是平面内一点，连结线段OM，极点O和点M的距离OM叫做点M的极径，通常用ρ来表示；以极轴Ox为始边、射线OM为终边所成的角xOM，叫做点M的极角，通常用θ来表示．(ρ, θ)叫做点M的极坐标，记作$M(\rho, \theta)$．

如图 9-2，在极坐标系中，A、B、C、D、E、F、G各点的极坐标分别是$(4, 0)$、$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$、$\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$、$\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$、$(3.5, \pi)$、$\left(6, \frac{4\pi}{3}\right)$、$\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$．角也可以取负值．例如，点$B$的极坐标也可以写作$\left(2, -\frac{7\pi}{4}\right)$．

当点M在极点时，它的极坐标$\rho=0$，θ可取任意值．

为了研究的方便，我们也允许ρ取负值．当$\rho<0$时，点$M(\rho, \theta)$的位置可以按下列规则确定：作射线OP，使$\angle xOP=\theta$，在OP的反向延长线上取点M，使$|OM|=|\rho|$，点M就是极坐标为(ρ, θ)的点(图 9-3)．

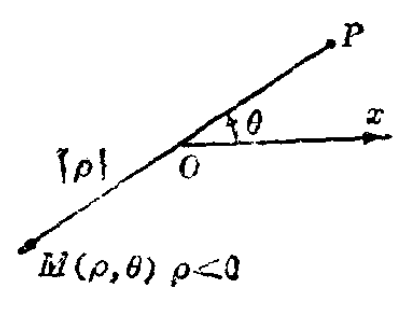


图 9-3

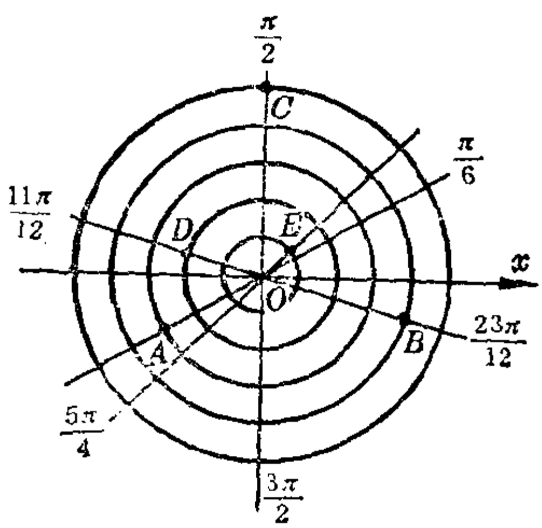


图 9-4

例如，图 9-4 中极坐标是$\left(-3, \frac{\pi}{6}\right)$、$\left(-4, \frac{11\pi}{12}\right)$、$\Big(-5,$

$-\frac{\pi}{2}\Big)$、$\Big(-2, -\frac{\pi}{12}\Big)$、$\Big(-1, \frac{5\pi}{4}\Big)$的各点分别是 A、B、C、D、E.

在极坐标系中，给定 ρ 和 θ，就可以在平面内确定唯一点 M；反过来，给定平面内一点，也可以找到它的极坐标(ρ, θ). 但和直角坐标系不同的是，平面内一个点的极坐标可以有无数多种表示法. 这是因为(ρ, θ)和$(-\rho, \theta+\pi)$是同一点的坐标，而且一个角加 $2n\pi$(n 是任意整数）后都是和原角终边相同的角. 比如，$\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$、$\left(-6, \frac{\pi}{6}+\pi\right)$以及$\left(6, \frac{\pi}{6}+2\pi\right)$、$\left(6, \frac{\pi}{6}-2\pi\right)$、$\left(-6, \frac{\pi}{6}+3\pi\right)$、$\left(-6, \frac{\pi}{6}-\pi\right)$等等，都是同一个点的极坐标.

一般地，如果(ρ, θ)是一个点的极坐标，那么$(\rho, \theta+2n\pi)$、$(-\rho, \theta+(2n+1)\pi)$都可以作为它的极坐标(这里 n 是任意整数). 但如果限定 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 或 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，那么除极点外，平面内的点和极坐标就可以一一对应了. 以后，在不作特殊说明的情况下，都认为 $\rho>0$.

练 习

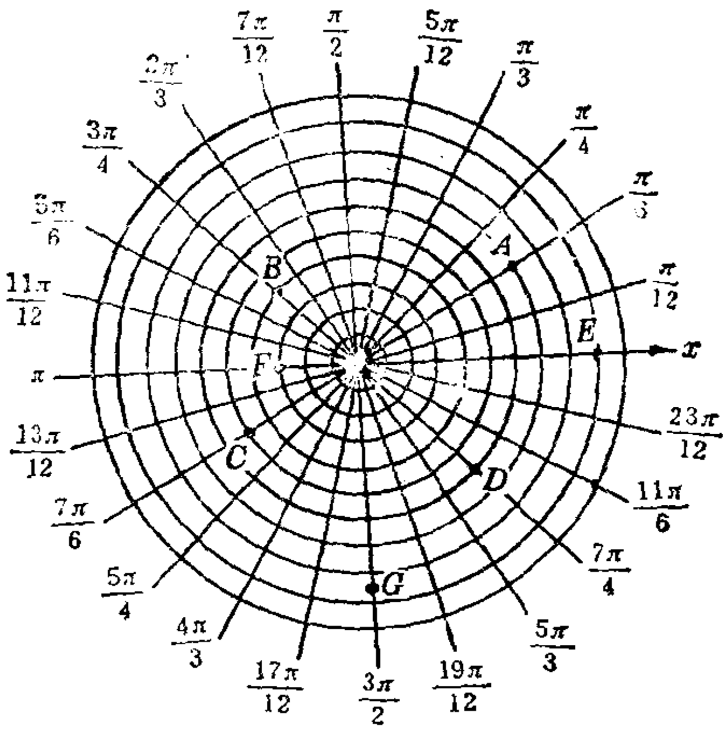
1. 在极坐标系中，作出下列各点：

(1) $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$、$B(6, -120°)$、$C\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$、$D\left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$、$E(4, 0)$、$F(2.5, 180°)$；

(2) $A\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$、$B\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$、$C\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$、$D(3, \pi)$、$E\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$，并说明这五个点有什么关系；

(3) $A\left(-2, \dfrac{\pi}{6}\right)$、$B\left(-1, \dfrac{\pi}{6}\right)$、$C\left(3, \dfrac{\pi}{6}\right)$、$D\left(4.5, \dfrac{\pi}{6}\right)$、$E\left(4.55, \dfrac{\pi}{6}\right)$，并说明这五个点有什么关系

2. 写出图中 A、B、C、D、E、F、G 各点的极坐标（$\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）.



（第2题）

3. 在极坐标系中，画出点 $A\left(5, \dfrac{\pi}{3}\right)$、$B\left(5, -\dfrac{\pi}{3}\right)$、$C\left(-5, -\dfrac{\pi}{3}\right)$、$D\left(-5, \dfrac{\pi}{3}\right)$，并说明点 A 和 B、C、D 分别有怎样的相互位置关系.

4. 将图 9-2 中 A、B、C、D、E、F、G 各点的极坐标的极径和极角改为负值.

9.2 曲线的极坐标方程

在直角坐标系中，平面上的一条曲线可用含变量 x、y 的

方程表示．同样，在极坐标系中，曲线可用含变量 ρ、θ 的方程 $F(\rho,\theta)=0$ 来表示，这种方程叫做**曲线的极坐标方程**．

求曲线的极坐标方程的方法和步骤，和求直角坐标方程完全类似，就是把曲线看作适合某种条件的点的集合或轨迹，将已知条件用曲线上的点的极坐标 ρ、θ 的关系式 $F(\rho,\theta)=0$ 表示出来，就得到曲线的极坐标方程．

例 1　求圆心是 $C(a,0)$、半径是 a 的圆的极坐标方程．

解： 由已知条件，圆心在极轴上，圆经过极点 O．设圆和极轴的另一个交点是 A（图 9-5），那么 $OA=2a$．

设 $M(\rho,\theta)$ 是圆上任意一点．因为 OA 是直径，所以 $\angle OMA=90°$．从直角三角形 OMA，得

$$OM=OA\cos\theta,$$

即

$$\rho=2a\cos\theta.$$

这就是所求圆的极坐标方程．

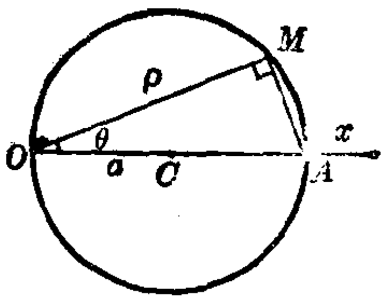


图 9-5

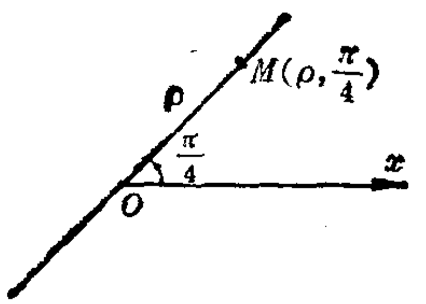


图 9-6

例 2　求过极点且倾斜角是 $\frac{\pi}{4}$ 的直线的极坐标方程．

解： 设 $M(\rho,\theta)$ 是直线上任意一点．这些点的特点是不论 ρ 取什么值（允许 ρ 取负值），总有 $\theta=\frac{\pi}{4}$（图 9-6）．

因此，过极点且倾斜角是$\frac{\pi}{4}$的直线的极坐标方程就是

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

例 3 求圆锥曲线（到焦点和到准线的距离的比是常数 e 的点的轨迹）的极坐标方程.

解：过焦点 F 作准线 l 的垂线，垂足为 K，以焦点 F 为极点，FK 的反向延长线 Fx 为极轴，建立极坐标系(图 9-7).

设 $M(\rho, \theta)$ 是圆锥曲线上任意一点，连结 MF，作 $MA\perp l$，$MB\perp Fx$，垂足分别为 A、B. 那么曲线就是集合

$$P=\left\{M:\ \frac{|MF|}{|AM|}=e\right\}.$$

因为 $|MF|=\rho$，$|AM|=|KB|=p+\rho\cos\theta$（$p$ 是焦点到准线的距离），得

$$\frac{\rho}{p+\rho\cos\theta}=e,$$

即
$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

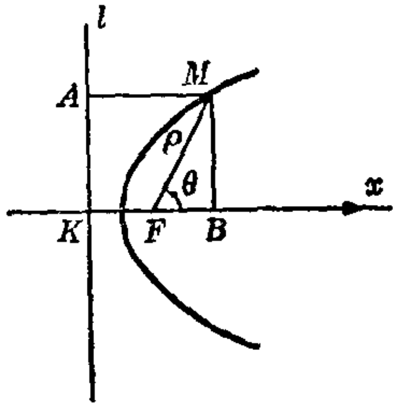


图 9-7

这就是圆锥曲线的极坐标方程.

当 $0<e<1$ 时，这个方程表示椭圆；

当 $e>1$ 时，这个方程表示双曲线；

当 $e=1$ 时，这个方程表示抛物线.

练 习

1. 求适合下列条件的直线的极坐标方程：

(1) 过极点，倾斜角是$\frac{\pi}{6}$；

(2) 过点 $A(8, 0)$，和极轴垂直；

2. 求适合下列条件的圆的极坐标方程：

(1) 圆心在极点，半径为 5；

(2) 圆心在点 $A\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$，半径为 a.

3. 以圆锥曲线的焦点为极点，焦点到准线的垂线的反向延长线为极轴，写出下列圆锥曲线的极坐标方程：

(1) 焦点到准线的距离是 5，离心率等于 2；

(2) 焦点到准线的距离是 3，离心率等于 $\frac{2}{3}$；

(3) 焦点到准线的距离是 4.5，离心率等于 1.

9.3 极坐标和直角坐标的互化

极坐标系和直角坐标系是两种不同的坐标系. 在平面上同时建立极坐标系和直角坐标系以后，同一个点可以有极坐标，也可以有直角坐标；同一条曲线可以有极坐标方程，也可以有直角坐标方程. 为了研究问题方便，有时需要把它们进行互化.

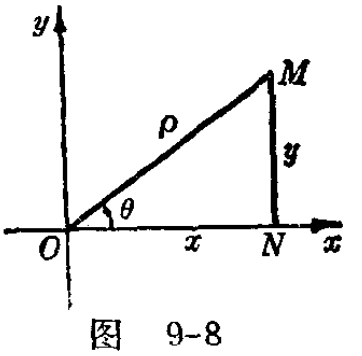


图 9-8

如图 9-8，把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系中取相同的长度单位. 设M是平面内任意一点，它的直角坐标是(x, y)，极坐标是(ρ, θ). 从点M作$MN \perp Ox$，由三角函数定义，可以得出 x、y 与 ρ、θ 之间的关系：

$$\boxed{x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta.} \tag{1}$$

由关系式(1)，可以得出下面的关系式：

$$\boxed{\rho^2=x^2+y^2,\quad \mathrm{tg}\,\theta=\frac{y}{x}.\ (x\neq 0)} \tag{2}$$

有了公式(1)、(2)，就可以对于平面上点的坐标或曲线方程，在直角坐标系和极坐标系之间互化．一般情况下，由 $\mathrm{tg}\,\theta$ 确定 θ 角时，根据点M所在的象限取最小正角．

例 1　把点M的极坐标$\left(-5,\dfrac{\pi}{6}\right)$化成直角坐标．

解：$x=-5\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$，

$y=-5\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{5}{2}$．

∴　点M的直角坐标是$\left(-\dfrac{5}{2}\sqrt{3},-\dfrac{5}{2}\right)$．

例 2　把点M的直角坐标$(-\sqrt{3},\ -1)$化成极坐标．

解：$\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$，

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因为点M在第三象限，且 $\rho>0$，所以最小正角 $\theta=\dfrac{7\pi}{6}$．

因此，点M的极坐标是$\left(2,\dfrac{7\pi}{6}\right)$．

例 3　化圆的直角坐标方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 为极坐标方程．

解：将(1)式代入原方程，得

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2a\rho\cos\theta=0,$$

就是 $$\rho=2a\cos\theta.$$

例 4 化圆锥曲线的极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 为直角坐标方程.

解: 原方程化为 $$\rho-e\rho\cos\theta=ep,$$

即 $$\rho=e(x+p).$$

两边平方,将 $\rho^2=x^2+y^2$ 代入,得

$$x^2+y^2=e^2(x+p)^2,$$

就是

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0.$$

练 习

1. 已知各点的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$、$\left(2,\dfrac{4\pi}{3}\right)$、$(-7,\ \pi)$、$\left(5,\dfrac{\pi}{2}\right)$、$\left(-2,-\dfrac{\pi}{6}\right)$,求它们的直角坐标.

2. 已知各点的直角坐标为 $(-1,-1)$、$(4,-4\sqrt{3})$、$(3,4)$、$(-5,0)$、$(0,-2)$,求它们的极坐标.

3. 把下列直角坐标方程化成极坐标方程:

   (1) $x=4$;　　(2) $y+5=0$;

   (3) $3x-4y=0$;　　(4) $x^2+y^2=9$.

4. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程:

   (1) $\rho=5$;　　(2) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$;

   (3) $\rho=4\cos\theta$;　　(4) $\rho^2\cos2\theta=16$.

9.4 等速螺线

在机械传动中，常常利用凸轮把旋转运动变成直线运动. 如图 9-9，当凸轮绕定轴旋转时，推动从动杆作上下往复直线运动. 不同形状的凸轮，可以使从动杆上下作各种不同的往复直线运动. 根据不同的要求，需要对凸轮的轮廓线作不同的设计. 如果需要从动杆作等速运动，凸轮的轮廓线就要用等速螺线.

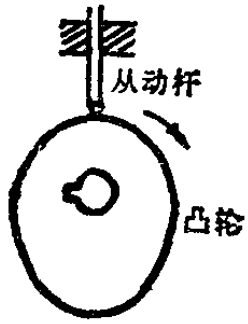


图 9-9

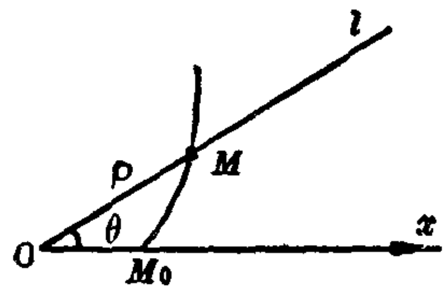


图 9-10

什么是等速螺线呢？ l 是从点 O 出发的射线，动点 M 沿 l 作等速直线运动，同时 l 又绕点 O 作等角速度的转动（图 9-10），点 M 的轨迹叫做**等速螺线**或**阿基米德螺线**.

下面我们来求等速螺线的极坐标方程.

取点 O 为极点，以 l 的初始位置为极轴，建立极坐标系（图 9-10）.

设 $M_0(\rho_0, 0)$ 是动点 M 的初始位置，M 在 l 上运动的速度为 v，l 绕点 O 转动的角速度为 ω，经过时间 t 后，l 旋转了角 θ，点 M 到达位置 (ρ, θ). 根据等速螺线的定义，得

$$\begin{cases}\rho-\rho_0=vt,\\ \theta=\omega t.\end{cases}$$

从上两式消去 t，得

$$\rho-\rho_0=\frac{v}{\omega}\theta.$$

设 $\frac{v}{\omega}=a(a\neq 0)$，得

$$\rho=\rho_0+a\theta.$$

这就是等速螺线的极坐标方程.

特殊的情形，$\rho_0=0$，得

$$\rho=a\theta.$$

这时极径 ρ 和极角 θ 成正比例.

例 画出等速螺线 $\rho=4\theta$ 的图形.

解：和直角坐标系中的画图步骤一样，给 θ 一系列的允许值，算出 ρ 的对应值，再根据对应值表，描点画图.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	…
ρ	0	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π	…

在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 的射线上，截取 $OA=\pi$，得到点 A；在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的射线上，截取 $OB=2\pi$，得到点 B；用同样方法可得到点 C、D、……. 将这些点顺次连结成平滑的曲线，就是 $\rho=4\theta$ 的图形(图 9-11).

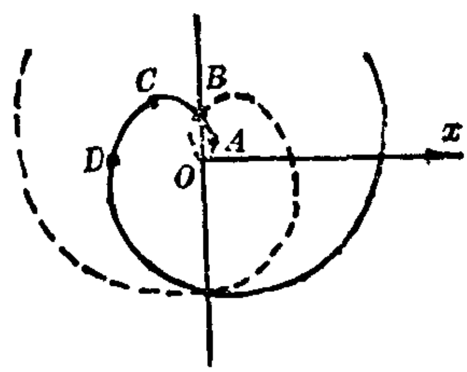


图 9-11

因为当 ρ、θ 是方程 $\rho=4\theta$ 的解时，$-\rho$、$-\theta$ 也是方程的解，又因以 (ρ,θ) 和 $(-\rho,-\theta)$ 为坐标的点关于过极点垂直于极轴

的直线对称，所以 $\rho=4\theta$ 的图形也关于该直线对称．图9-11中的实线表示 θ 取正值时的螺线的一部分，虚线表示 θ 取负值时的螺线的一部分．

练　习

求证：如果 $M_1(\rho_1, \theta_1)$、$M_2(\rho_2, \theta_2)$ 是等速螺线上的两点，那么 $\rho_2-\rho_1$ 与 $\theta_2-\theta_1$ 成正比例．

习　题　十

1. 已知 $A(\rho, \theta)$、$B(\rho, -\theta)$、$C(-\rho, -\theta)$、$D(-\rho, \theta)$，问点 A 和 B、C、D 分别有怎样的相互位置关系．

2. 求下列各图形的极坐标方程：

   (1) 经过点 $P\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$，垂直于极轴的直线；

   (2) 经过点 $Q\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right)$，平行于极轴的直线；

   (3) 圆心在点 $C(5, \pi)$，半径等于 5 的圆；

   (4) 经过点 $A(a, 0)$ 和极轴相交成 α 角的直线．

3. 说明下列极坐标表示什么曲线，并画图．

   (1) $\rho=4$；　　(2) $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$；

   (3) $\rho\cos\theta=3$；　　(4) $\rho\sin\theta=2$；

   (5) $\rho=6\cos\theta$；　　(6) $\rho=10\sin\theta$．

4. 画出 $\rho=10(1+\cos\theta)$ 的图形．

5. 从极点作圆 $\rho=2a\cos\theta$ 的弦，求各弦的中点的轨迹的方程．

6. 从极点 O 作直线和直线 $\rho\cos\theta=4$ 相交于点 M，在 OM 上取一点 P，使 $OM\cdot OP=12$，求 P 点的轨迹的方程，并且说明轨迹是什么曲线。

7. 一个彗星的轨道是抛物线，太阳位于这条抛物线的焦点上。已知这个彗星距太阳 1.6×10^8 公里时，极径和轨道的轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角。求这个彗星轨道的极坐标方程，并且求它的近日点离太阳的距离。

8. 把下列直角坐标方程化成极坐标方程：

(1) $x^2+y^2=16$;　　(2) $xy=a$;

(3) $x^2+y^2+2y=0$;　　(4) $x^2-y^2=a^2$。

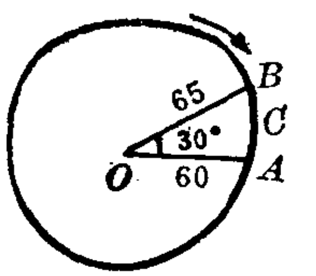
9. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程：

(1) $\rho=5\operatorname{tg}\theta$;　(2) $\rho=\frac{5}{\cos\theta}$;　(3) $\rho+6\operatorname{ctg}\theta\cdot\csc\theta=0$;

(4) $\rho(2\cos\theta-5\sin\theta)-3=0$;　(5) $\rho=\frac{6}{1-2\cos\theta}$.

10. 已知一个圆的方程是 $\rho=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$，求圆心和半径。

11. 某自动机床上有一个凸轮，它的轮廓线 ACB 是一段等速螺线(如图)，A 点到旋转中心 O 的距离 $\rho_0=60$ 毫米，轴心角 $\angle AOB=30°$，工作时曲线 ACB 能把从动杆推出 5 毫米。求这段等速螺线的极坐标方程。



(第 11 题)

二 参数方程

9.5 曲线的参数方程

我们知道，曲线可看作动点运动的轨迹．动点运动的规律，有时不是由动点的坐标 x 和 y 之间的关系直接反映出来，而是由动点的位置与另一个变量的关系反映出来．下面我们来看一个例子．

设炮弹的发射角为 α，发射的初速度为 v_0，求弹道曲线的方程(不计空气阻力)．

这时，弹道曲线是炮弹飞行的轨迹，炮弹的位置由时间来确定．取炮口为原点，水平方向为 x 轴，建立直角坐标系(图 9-12)．

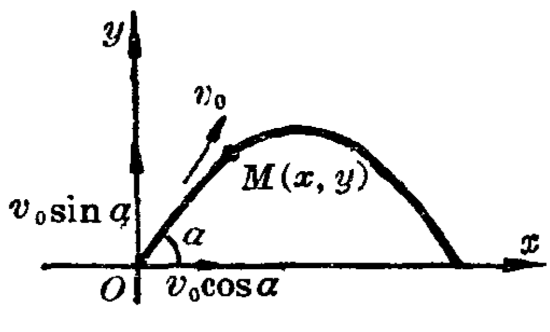


图 9-12

设发射 t 秒后炮弹的位置在 $M(x, y)$．因为炮弹在 Ox 方向的运动是以 $v_0\cos\alpha$ 为初速的匀速运动，在 Oy 方向上是以 $v_0\sin\alpha$ 为初速的竖直上抛运动，所以有

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases} \tag{1}$$

这里 $g=9.8$ 米/秒^2 是重力加速度，$0\leqslant t\leqslant b$ (b 是炮弹落地的

时刻).

这里,初速度 v_0、发射角 α 和重力加速度 g 都是常量,当时间 $t\,(0\leqslant t\leqslant b)$ 取某一固定值时,由方程组(1)就可以确定炮弹当时所在位置的坐标 (x, y),这样也就确定了弹道曲线上相应的一个点;当 t 变动时,x、y 的值也随着变动,于是点 $M(x, y)$ 就描出了弹道的曲线.因此,方程组(1)可看作弹道曲线的方程.

一般地,在直角坐标系中,如果曲线上任意一点的坐标 x, y 可以表示为某个变量 t 的函数

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t); \end{cases} \tag{2}$$

而且反过来,对于 t 的每一个允许值,由方程组(2)所确定的点 $M(x, y)$ 都在这条曲线上,那么方程组(2)叫做这条曲线的**参数方程**.变量 t 叫做**参变数**,简称**参数**.

在直角坐标系里,曲线可以用参数方程表示.例如,弹道曲线的参数方程.在极坐标系里,曲线也可以用参数方程表示,参数方程有下面的形式:

$$\begin{cases} \rho=F(t), \\ \theta=G(t). \end{cases}$$

例如,等速螺线的参数方程是

$$\begin{cases} \rho=\rho_0+vt, \\ \theta=\omega t. \end{cases}$$

相对于参数方程来说,直接给出点的坐标间的关系而得到的曲线方程叫做**普通方程**.

例 1 如图 9-13,以原点 O 为圆心,分别以 a、$b\,(a>b)$ 为

半径作两个圆，大圆的半径 OA 与小圆交于点 B，过点 A 作 y 轴的平行线交 x 轴于点 N，过点 B 作 x 轴的平行线交 AN 于点 M. 求当半径 OA 绕点 O 转动时，点 M 的轨迹方程.

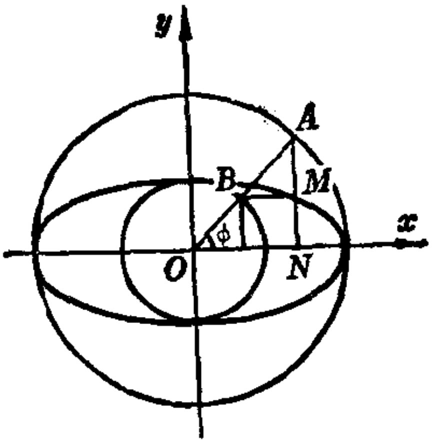


图 9-13

解：设点 M 的坐标是 (x,y)，$\angle NOA=\phi$（参数），那么

$$x=ON=|OA|\cos\phi,$$
$$y=NM=|OB|\sin\phi.$$

也就是
$$\begin{cases}x=a\cos\phi,\\ y=b\sin\phi.\end{cases}$$

这就是所求点 M 的轨迹方程.

例 2 求经过点 $M_0(x_0, y_0)$、倾斜角为 α 的直线的参数方程.

解：设 $M(x,y)$ 为直线上任意一点. 过点 M_0 作 x 轴的平行线，过点 M 作 y 轴的平行线，两线交于点 Q，且令 $M_0M=t$（图 9-14），则

$$\begin{cases}x-x_0=t\cos\alpha,\\ y-y_0=t\sin\alpha.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases}$$

这就是所求直线的参数方程.

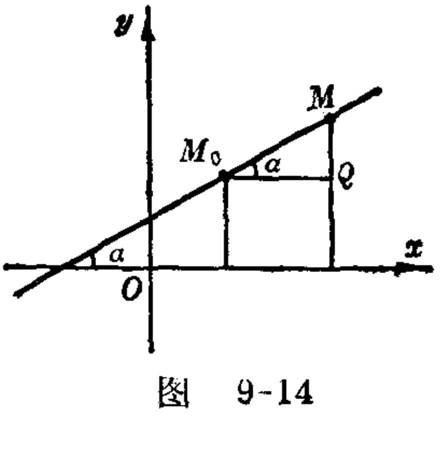
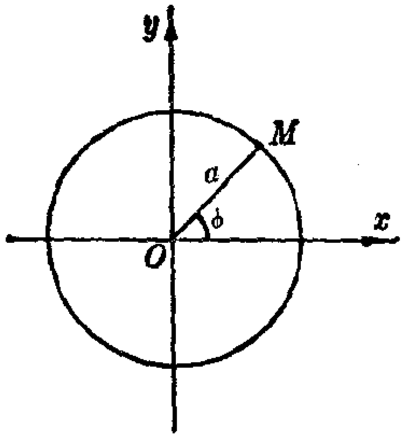


图 9-14

练 习

1. 求圆心在原点，半径为 a 的圆的参数方程.



(第 1 题)

(提示：以 ϕ 为参数，如图.)

2. 已知一直线上两点 $M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$. 利用分点 $M(x, y)$ 分有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 所成的比 λ 为参数，写出直线的参数方程。

9.6 参数方程和普通方程的互化

参数方程和普通方程是曲线方程的不同形式，它们都是表示曲线上点的坐标之间关系的. 一般情况下，我们可以通过消去参数方程中的参数，得出直接表示 x、y 之间关系的普通方程；也可以选择一个参数将普通方程变成参数方程的形式. 如果参数选择得适当，方程可能比较简单或者有比较明显的几何意义.

例 1 把弹道曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, & (1) \\ y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$

化为普通方程.

解： 由(1)得

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}.$$

代入(2),得普通方程

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+\mathrm{tg}\alpha\cdot x.$$

这是抛物线的方程.

例 2 化下列参数方程为普通方程:

(1) $\begin{cases}x=2pt^2,\\y=2pt;\end{cases}$ (t 是参数)

(2) $\begin{cases}x=a\cos\phi,\\y=b\sin\phi;\end{cases}$ (ϕ 是参数)

(3) $\begin{cases}x=a\sec\theta,\\y=b\,\mathrm{tg}\theta.\end{cases}$ (θ 是参数)

解: (1) 从第二式得

$$t=\frac{y}{2p}.$$

代入第一式,得

$$x=\frac{y^2}{2p}.$$

就是

$$y^2=2px.$$

这是抛物线的标准方程.

(2) 分别把两式两边平方,并变形,得:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=\cos^2\phi,\\[2ex]\dfrac{y^2}{b^2}=\sin^2\phi.\end{cases}$$

将两式相加,得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\phi+\sin^2\phi,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这是椭圆的标准方程.

(3) 从所给方程得

$$\frac{x}{a}=\sec\theta, \qquad \frac{y}{b}=\mathrm{tg}\,\theta.$$

将两式两边分别平方后相减，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\theta-\mathrm{tg}^2\theta,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这是双曲线的标准方程.

例 3 化直线的点斜式方程 $y-y_0=\mathrm{tg}\,\alpha(x-x_0)$ 为参数方程.

解： 将直线的点斜式方程 $y-y_0=\mathrm{tg}\,\alpha(x-x_0)$ 变形为

$$\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{x-x_0}{\cos\alpha}.$$

设上述比值为 t，则有

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=t,\\[2mm]\dfrac{y-y_0}{\sin\alpha}=t.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases}$$

这就是经过点 $P_0(x_0, y_0)$，倾斜角为 α 的直线的参数方程.

练　习

1. 把下列参数方程化成普通方程，并说明它们各表示什么曲线：

(1) $\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi; \end{cases}$ （ϕ 是参数）

(2) $\begin{cases} x = x_1 + at, \\ y = y_1 + bt. \end{cases}$ （t 是参数）

2. 设 $x = a\operatorname{tg}\varphi$, ϕ 是参数，把方程 $xy = a^2$ 化为参数方程.

9.7 圆的渐开线及其方程

机器上的齿轮的齿形，有时采用渐开线(图 9-15)，这种齿形的齿轮传动平稳，磨损少，制造安装方便．要设计和加工这种齿轮，就需要借助圆的渐开线方程．

什么是渐开线呢？如图 9-16，用一条没有弹性的细绳绕在一个固定的圆盘的侧面上，绳的外端拴一支笔，拉直绳，保持和圆盘相切，逐渐展开，笔尖在平面上画出的曲线，即细绳外端的轨迹就叫做**圆的渐开线**．这个圆叫做渐开线的**基圆**．

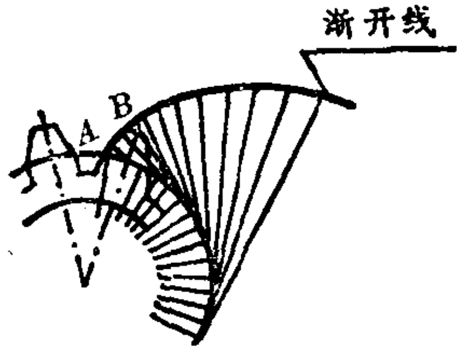


图　9-15

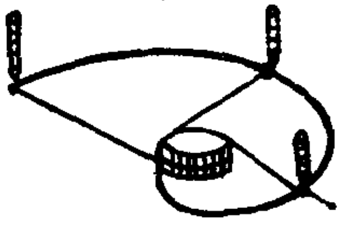


图　9-16

下面我们推导圆的渐开线的参数方程．

设基圆的圆心为O，半径为r，绳的外端为点A．以O为

原点，直线 OA 为 x 轴，建立直角坐标系(图 9-17)。

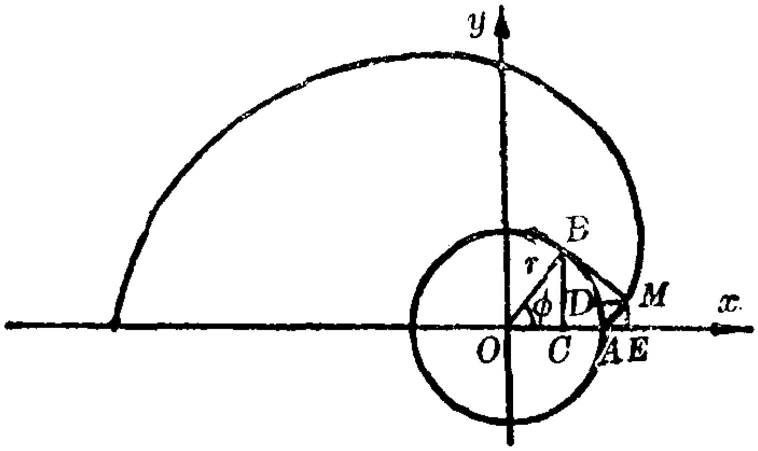


图 9-17

设 $M(x, y)$ 是圆的渐开线上任意一点，BM 为圆的切线，B 为切点，连结 OB，取 $\angle AOB=\phi$(弧度)为参数，则由圆的渐开线的定义，切线 BM 的长等于 $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $r\phi$.

作 $ME\perp Ox$, $BC\perp Ox$, $MD\perp BC$，垂足分别为 E、C、D，则 $\angle MBD=\phi$. 由此可得

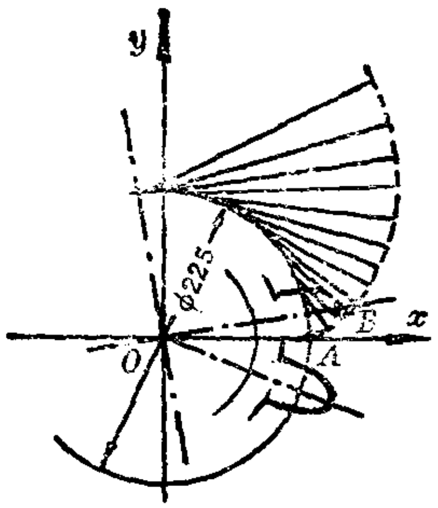
$$
\begin{aligned}
x&=OE=OC+CE=OC+DM\\
&=r\cos\phi+r\phi\sin\phi,\\
y&=EM=CD=CB-DB\\
&=r\sin\phi-r\phi\cos\phi.
\end{aligned}
$$

因此，所求圆的渐开线的参数方程是

$$
\begin{cases}
x=r(\cos\phi+\phi\sin\phi),\\
y=r(\sin\phi-\phi\cos\phi).
\end{cases}
$$

练　习

如图，有一标准的渐开线齿轮，齿轮的齿廓线的基圆直径是 225mm，求齿廓线 AB 所在渐开线的参数方程



9.8 摆线及其方程

一个圆沿着一条定直线无滑动地滚动时，圆周上的一个定点M的轨迹叫做摆线，又叫**旋轮线**(图 9-18)。

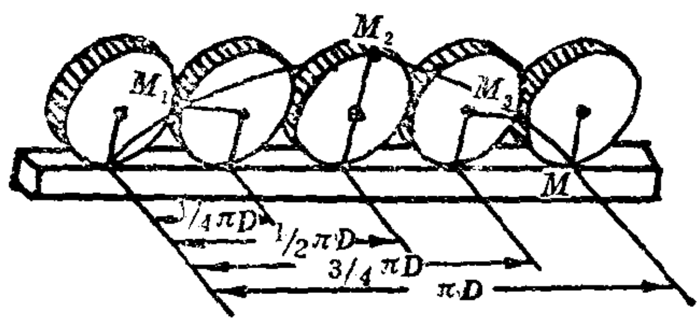


图 9-18

下面我们求摆线的参数方程.

设圆的半径为 a，取圆滚动所沿的直线为 x 轴，圆上定点M落在直线上的一个位置为原点，建立直角坐标系(图 9-19)。圆滚动ϕ角后圆心在点B，并与x轴相切于点A. 作$MD\perp Ox$，$MC\perp BA$，垂足分别为D、C. 用(x, y)表示点M的坐标，取ϕ作参数，那么，OA的长等于$\overset{\frown}{MA}$的长，得

$$x = OD = OA - DA = a\phi - a\sin\phi,$$

$$y = DM = AC = AB - CB = a - a\cos\phi.$$

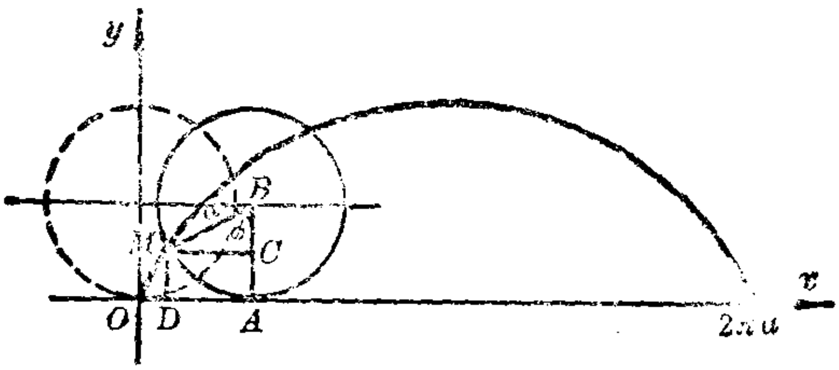


图　9-19

因此，所求摆线的参数方程是

$$\begin{cases}x=a(\phi-\sin\phi),\\y=a(1-\cos\phi).\end{cases}$$

当圆滚动一周，即 ϕ 由 0 变到 2π 时，点 M 描出摆线的第一拱．圆向前再滚动一周，ϕ 从 2π 变到 4π，点 M 描出摆线的第二拱．显然，第二拱的形状和第一拱完全相同．圆继续向前滚动，可得第三拱、第四拱、……．圆向后滚动的情况也一样．可见摆线是无数段拱形弧组成的，拱宽为 $2\pi a$，拱高为 $2a$.

摆线的应用也是比较广泛的．比如在机械传动中，有的齿轮的齿形线就是摆线的一部分．

练　习

求摆线 $\begin{cases}x=\phi-\sin\phi,\\y=1-\cos\phi\end{cases}$ 上 $2\pi\leqslant\phi\leqslant4\pi$ 这一段与直线 $y=\dfrac{3}{2}$ 的交点的坐标．

习 题 十 一

1. 试述参数方程的定义．参数方程和普通方程有什么不

同?

2. 把下列参数方程化成普通方程，并说明各表示什么曲线：

(1) $\begin{cases}x=3-2t,\\y=-4t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=at,\\y=at^2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=5\cos t+2,\\y=2\sin t-3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2},\\y=\dfrac{2bt}{1+t^2}.\end{cases}$

3. 设 $y=tx$（t 是参数），化方程 $y^2=4x^2-5x^3$ 成参数方程.

4. 求椭圆 $4x^2+y^2=16$ 的参数方程：

(1) 设 $x=2\cos\phi$，ϕ 是参数；

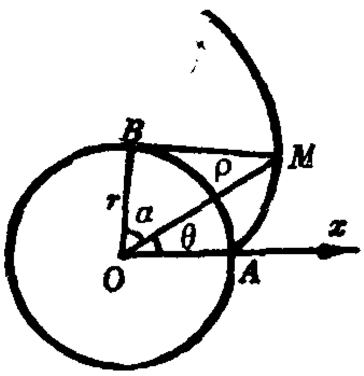
(2) 设 $y=tx+4$，t 是参数.

5. 求过点 $P(1,-5)$、倾斜角是 $\frac{\pi}{6}$ 的直线的参数方程.

6. 求半径为 3、圆心坐标是 $(2,-3)$ 的圆的参数方程.

7. 已知椭圆的长半轴是 6，短半轴是 5，椭圆中心坐标是 $(-1,2)$，求这个椭圆的参数方程.

8. 如图，设基圆半径为 r，渐开线的起点为 A，取圆心 O 为极点，射线 OA 为极轴．$M(\rho,\theta)$ 为渐开线上任一点，过 M 作基圆的切线 MB，B 是切点．设 $\angle BOM=\alpha$．试用 α 做参数，写出渐开线在极坐标系中的参数方程.



（第 8 题）

小　结

在这一章里，我们初步介绍了极坐标和参数方程以及它们的一些应用.

一、和直角坐标系一样，极坐标系也是常用的一种坐标系. 利用极坐标方程表示一些绕定点作旋转运动的点的轨迹比较方便.

二、极坐标和直角坐标可以互化. 把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴时，点 M 的直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 有下面的关系：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta; \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2=x^2+y^2, \\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0). \end{cases}$$

三、在实际问题中，当我们求轨迹方程时，有时很难或不能找到曲线上点的坐标之间的直接关系. 如果引进适当的参数，问题往往比较容易解决. 研究运动的物体的轨迹时，常用时间作参数；研究旋转的物体的轨迹时，常用转角作参数.

四、化参数方程为普通方程的关键在于消去参数. 普通方程可以通过适当选择参数化为参数方程.

五、参数方程并不是指某一种特定坐标系的方程，不仅在直角坐标系里曲线可以有参数方程，在极坐标系里同样可以有参数方程，这时 ρ 和 θ 都分别表示为某一特定参数的函数.

复 习 题 九

1. (1) 在 $\rho=\dfrac{3}{\cos\theta}$ 的图形上，求有下列极角的各点的坐标：

① $\dfrac{\pi}{3}$，　② $-\dfrac{\pi}{3}$，　③ 0，　④ $\dfrac{\pi}{6}$；

(2) 在 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta}$ 的图形上，求有下列极径的各点的坐标：

① 1，② 2，③ $\sqrt{2}$.

2. 求经过 $A\left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 和 $B\left(3, \dfrac{\pi}{6}\right)$ 两点的直线和极轴所成的角。

3. 求下列曲线交点的极坐标，并画图：

(1) $\begin{cases}\rho=4\sin\theta, \\ \rho=2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\rho=\dfrac{3}{2-\cos\theta}, \\ \rho=2.\end{cases}$

4. 说明下列方程的图形表示什么曲线，并且画图：

(1) $\rho=\dfrac{5}{1-\cos\theta}$；　　(2) $\rho=\dfrac{5}{3-4\cos\theta}$；

(3) $\rho=\dfrac{1}{2-\cos\theta}$.

5. 求适合下列条件的点的轨迹的极坐标方程，并且画出它们的图形：

(1) 极径和极角成正比例；

(2) 极径和极角成反比例.

6. 说明下列两条直线的位置关系：

(1) $\theta=\alpha$ 和 $\rho\cos(\theta-\alpha)=a$；

(2) $\theta=\alpha$ 和 $\rho\sin(\theta-\alpha)=a$.

7. 把下列各直角坐标方程化成极坐标方程：

(1) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

(2) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$;

(3) $(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$.

8. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程：

(1) $\rho=-4\sin\theta+\cos\theta$;

(2) $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$.

9. 等速螺线过点 $O(0,0)$，极角每增加$\frac{\pi}{3}$弧度，极径就增加1.5.

(1) 试求螺线的极坐标方程；

(2) 算出 $\theta=0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ 所对应的 ρ 的值；

(3) 描出上述各点，并作出 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 范围内的螺线图形.

10. 设 t 是参数，把参数方程

$$\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=t^2+2\end{cases}$$

化成普通方程.

11. 设 $x=1+2\cos\theta$, θ 是参数，把方程

$$17x^2-16xy+4y^2-34x+16y+13=0$$

化成参数方程.

12. (1) 写出经过点 $M_1(1,5)$、倾斜角是$\frac{\pi}{3}$的直线的参数方程(以动点M到点M_1的距离 t 为参数)；

(2) 利用这个参数方程，求这条直线和直线$x-y-2\sqrt{3}=0$的交点到点M_1的距离；

(3) 求这条直线和圆$x^2+y^2=16$的两个交点到点M_1的距离的和与积

13. 我国发射的第一颗人造地球卫星的运行轨道是一个椭圆，长轴为15565公里，短轴为15443公里．取椭圆中心为坐标原点，长轴为x轴，求卫星轨道的参数方程。

Document generated by Anna’s Archive around 2023-2024 as part of the DuXiu collection (https://annas-blog.org/duxiu-exclusive.html).

Images have been losslessly embedded. Information about the original file can be found in PDF attachments. Some stats (more in the PDF attachments):
{
  "filename": "MTEwMTY2NzMuemlw",
  "filename_decoded": "11016673.zip",
  "filesize": 5215985,
  "md5": "96d948441acc1abeda5ee62e59bfc136",
  "header_md5": "b6d2cbd03a2a4f068270a364be4141bd",
  "sha1": "85f44d9339cd78be18852d50c5400aa68e98c722",
  "sha256": "a1679f5405d61027a179d4112e3ede6a43db6847f9250968c90fd262212b30b7",
  "crc32": 3059176608,
  "zip_password": "",
  "uncompressed_size": 5409351,
  "pdg_dir_name": "\u255d\u2555\u2551\u256c \u2561\u250c\u2562\u25a0\u2593\u00df
\u2569\u2558\u2559\u251c\u2592\u255b_11016673",
  "pdg_main_pages_found": 140,
  "pdg_main_pages_max": 140,
  "total_pages": 145,
  "total_pixels": 458419264,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}